Математическая Библиотека

А. В. ВАСИЛЬЕВ
заслуженный профессор.

ЦЕЛОЕ ЧИСЛО

Ὁ Θεὸς ἀριθμητίζει
Гаусс.

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК
с 24 портретами и рисунками в тексте и отдельной таблицей

1919 г.

Артистическое заведение Т-ва А. Ф. Маркс, Измайловск. просп., № 29.

I.

От одного и двух к бесконечности.

Для нас является невозможным проследить по непосредственным источникам генезис понятия о целом положительном числе. Древнейший письменный математический памятник, дошедший до нас, — папирус, написанный египетским писцом Ламесу (Яхмос) за 1700 лет до Р. Х., свидетельствует нам, что и в это отдаленное время египтяне были знакомы с действиями не только над целыми числами, но и над дробями. За неимением непосредственных свидетельств, мы должны обратиться к свидетельствам косвенным.

Такими косвенными свидетельствами являются данные этнологии, относящиеся к современным дикарям, данные, которые можно почерпнуть, изучая развитие детей, и наконец данные, извлекаемые из изучения с одной стороны—народных преданий, с другой—языка, который является несомненно памятником психологической работы давно отживших поколений.

И все эти косвенные свидетельства одинаково освещают и подтверждают две истины, имеющие важное значение и для истории человеческого духа и для психологии понятия о числе.

Многотрудною и продолжительною психологиче-

скою работою приобретало постепенно человечество понятие о последовательных целых числах, расширяло, если позволено так выразиться, свой численный кругозор; при этом понятию о числе отвлеченном всегда предшествовало и сначала с ним тесно сливалось понятие о числе каких-нибудь определенных предметов, большею частью органов человека, служивших ему пособием при счете.

Мы можем даже, с помощью преимущественно данных лингвистики, видеть в дали веков, нам предшествующих, те этапы, на которых останавливалась по временам психологическая работа человечества, чтобы, постоянно затем возобновляясь, привести нас, наконец, к тому понятию о бесконечном ряде целых положительных чисел, которое составляет предмет изучения чистой математики, и, исходя из которого, математика достигла понятия о комплексном числе.

С трудом можем мы представить себе народ, у которого не существует особенных названий для чисел бо́льших трех, народ, для которого все прочие численныя выражаются одним словом куча, — а между тем многие свидетельства путешественников и этнологов указывают на то, что такие народы существуют.

Как ребенок, не научившийся считать, не ответит числом на вопрос, сколько у него кукол, но подробно опишет все свои куклы, — так и эскимосы, по словам путешественника Парри, не могут правильно сосчитать своих детей, если их больше трех. Они отличают похожие предметы не отвлеченными числами: первый, второй, третий и т. д., но названием, индивидуально связанным с каждым пересчитываемым предметом. Не общее число своих собак держит в памяти эскимос, но отдельные представления о белой собаке с чер-

ными крапинами, о собаке, родившейся в голодную зиму, и т. п. Поэтому пересчитывание является для дикаря, как указывают данные, расбросанные в сочинениях по первобытной культуре Леббока, Тайлора и др., операциею тяжелою, трудною, после которой дикарь сейчас же начинает жаловаться на боль в голове.

Эту стадию умственного развития, на которой находятся теперь также ботокуды Бразилии и папуасы Новой Голландии, проходила несомненно и арийская раса, которая затем, в лице высших представителей своего гения, открыла численную закономерность и в движении отдаленных небесных светил и в движении неизмеримо-малых молекул материи.

Что и для арийской расы было время, когда понятие о числе не представлялось с достаточной отчетливостью, подтверждают прежде всего предания народов, указывающие на тех благодетелей человечества, которые научили его числу. У греков, например, такими изобретателями числа являются то Паламед, то Прометей.

Припомним ту поэтическую картину, в которой передает предание об изобретении числа, устами Прометея греческий трагик Эсхил в его бессмертной трагедии „Прикованный Прометей":

Послушайте, что смертным сделал я...
Число им изобрел
И буквы научил соединять,
Им память дал, мать муз, всего причину.

Данные языка, подобно народным преданиям, указывают нам на первые стадии выработки названий для чисел и на первые стадии развития понятия об отвлеченном числе.

Существование во многих языках единственного, *двойственного* и множественного чисел указывают,

повидимому, на ту пройденную ступень развития, при которой ясно различались понятия об одном предмете и о двух предметах, но начиная с трех, такое различие прекращалось, и являлось только одно понятие о множестве, из котораго еще не дифференцировались другие числительные.

Но есть данные, указывающие нам и на следующую ступень развития, на которой явились отдельные названия для трех и четырех, но вместе с тем эти числа, являясь крайними пределами чисел, имевших название, служили символами множества, громадности. Припомним изречение Овидия:

„terque quaterque beati",

и сопоставим с ним изображение множества в египетских иероглифах четырьмя чертами, или китайское „четыре моря" вместо всех морей.

Не лишено значения и указание лингвистики на то, что по грамматическому строю первые три числительные во многих языках резко отличаются от всех прочих числительных; первые три числительные изменяются по родам (два, две, tres, tria), все прочие не изменяются. Первые числительные принадлежат, очевидно, более ранней эпохе, чем та, в которую вырабатывались названия прочих. То обстоятельство, что корни первых трех числительных общи всем известным народам арийской и народам семитской рас, между тем как сходство пропадает для дальнейших числительных, показывает, что названия прочих числительных появились уже в ту, сравнительно недавнюю эпоху, когда арийские и семитские народы покинули свою общую родину.

Если название числительного *два* связаны у разных народов с различными органами человека или животных (у китайцев два—пу (уши); в Тибете лва—patscha (крыло), у готтентотов два—t'koam

(рука), то выработка дальнейших названий для чисел находится, что признают филологи, в связи *со счетом по пальцам.* Имена числительные во многих языках указывают нам, что у первобытного человека пальцы являются преимущественным орудием счета, т.-е. постоянным неизменным рядом значков, с которым при пересчитывании сравнивается всякий другой новый ряд пересчитываемых предметов.

Когда зулусу, напр., нужно сказать шесть, он говорит tatisitupa, что значит взять большой палец руки; в Гренландии, в долине Ориноко, в Австралии шесть равнозначаще с фразою: один с другой руки, десять—две руки, одиннадцать—две руки и палец, двадцать—человек. У эскимосов берегов Гудзонова залива название числительных для восьми, девяти, десяти несомненно совпадают с названиями среднего, четвертого и малого пальцев; то же самое замечается у гуарани Южной Америки и у малайцев. У таманаков с Ориноко двадцать один—один с руки другого человека; такое выражение объясняется, если мы сопоставим с ним рассказ путешественников о том, что у некоторых народов Южной Африки счет чисел и теперь производится с помощью двух, трех человек, при чем пальцы одного соответствуют единицам, пальцы другого—десяткам, пальцы третьего—сотням.

Что касается до языков арийской расы, то только корень числительного пять (pente) несомненно тожествен с корнем санскритского pankam или персидского penjeh (распростертая рука). Но нельзя не упомянуть и о гипотезе Потта, объясняющей подобным же образом и следующие числительные названиями мизинца и прочих пальцев правой руки. Потт сопоставляет, например, название *мизинца* в латинском языке (auricularis—чистящий уши) с тожеством в арийских языках

корня числительного *шесть* и глагола *скрести*. Подобные же натянутые объяснения дает Потт и для следующих числительных.

Но и независимо от гипотезы Потта раньше приведенные лингвистические данные несомненно подтверждают ту истину, что названия для первых чисел получались от конкретных предметов, которыми пользовались для счета, что понятие об отвлеченном целом числе вырабатывалось из прикладного целого числа, из названий предметов служивших для счета.

На известной стадии развития человечества расширение области ясно представляемых и называемых чисел пошло быстрее; но мы можем все таки указать, основываясь на культурно-исторических данных, как постепенно расширялась область чисел, как постепенно то те, то другие все бо́льшие и бо́льшие числа являлись пределами чисел, имевших свои определенные названия, и потому символами неопределенного множества.

Мы находим, например, объяснение, почему число *тринадцать* считалось и до сих пор считается суеверными людьми приносящим несчастие, если допустим, что число *двенадцать* являлось в известное время символом множества, синонимом полноты, и следующее за ним число являлось лишним и потому нечестивым, несчастным.

В тюркских легендах, в скифских сагах синонимом неопределенного множества является или сорок или *сорок сороков*. Влияние туранских сказаний на наши были, изученное Стасовым, позволяет отнести к туранскому источнику и наше русское *сорок сороков*, часто употребляемое, как символ несчетного множества.

Но еще больший культурно-исторический интерес связан с числом *шестьдесят*, которое так часто фигурирует в преданиях вавилонских, персидских

и греческих, являясь в них всегда синонимом большого числа. *Шестьдесят* является числом вавилонских богов, шестьдесят локтей—вышина золотого идола, поставленного в храме Навуходоносора. Позднее с тем же значением несчетного множества являются некоторые кратные шестидесяти: 300, 360. Ксеркс дал Геллеспонту 300 ударов, Кир раздробил реку Гиндес, в которой потонула одна из его любимых лошадей, на 360 ручьев. В одной персидской песне воспеваются 360 полезных употреблений пальмы.

Числа, встречающиеся в вавилонских преданиях, представляют культурно-исторический интерес в двояком отношении. Вавилон представляется нам с одной стороны родиною гаданий, основанных на числах, родиною различных числовых суеверий, которые имели обширное влияние с одной стороны на Китай, с другой на идеи Пифагорейской школы, придававшей числам особое мистическое значение. Это мистическое значение, придававшееся числам, может служить новым указанием на новость и трудность понятие о числе на известной ступени человеческого развития *).

С другой стороны число 60, встречающееся в легендах Вавилонского происхождения, впоследствии в Вавилоне же, при развитии научных знаний, явилось основанием системы счисления, следы которой сохранились у нас в делении времени и углов.

По мере развития десятичной системы счисления, ее единицы различных разрядов являлись символами множества. В церковно славянском языке *тьма*, т.-е. неизмеримое множество, есть синоним то тысячи, то десятка тысяч. Но существовало

*) Вопросу о числовой мистике посвящена статья проф. А. В. Васильева: „О числовых суевериях". Казань, 1885. Смотри также далее главу II.

еще и „великое словенское число", употреблявшееся, „коли прилучался великий счет и перечень". Этот великий счет шел до единицы 48-го разряда и даже иногда до единицы 49-го разряда. В этом великом счете тьма означает уже тысячу тысяч, являются и высшие единицы: *легион* т.-е. тьма тем (миллион миллионов), *леодр* т.-е. легион легионов и наконец *ворон* или леодр леодров.

„И более сего, — говорится в славянских рукописях,—несть (человеку) разумевати". Но иногда (в одной рукописи XVII столетия) доходили и до десяти воронов или *колоды* и затем наивно прибавляли: „сего числа несть больше".

Таким образом и здесь есть *предел числам*, но как далеко отстоит этот предел от тех первых пределов, на которые указывают данные лингвистики.

Мы можем с большою вероятностью указать ту ветвь арийской расы, которая относилась с особенною любовью к громадным числам и старалась по мере возможности расширить пределы употребляемых чисел, изобретая для них особенные названия. Эта ветвь—древние индусы. Им принадлежит честь поразительного развития искусства счета, как им же человечество обязано арифметикою положения. Подобно тому, как боги греков сходят иногда с Олимпа и, принимая участие в людских битвах, гордятся силою своих мускулов, учитель Нирваны и закона владыка *Будда* еще в юном возрасте отличался искусством счета. Я приведу отрывок из прекрасного русского перевода поэмы Эдвина Арнольда: „Свет Азии или Великое Отречение", с необыкновенною точностью передающей легенду о Буддѣ.

Восьмилетний царевич, будущий Будда, подвергается испытанию Висвамитрою, „наук, искусств учителем превосходным".

„И сказал Висвамитра:

Довольно, перейдем к цифрам! Повторяй за мной, считай так, как я буду, пока дойдем до лакхи (лакха=100.000): один, два, три, четыре, затем десятки, и сотни, и тысячи.

И вслед за ним назвал отрок единицы, десятки, сотни и не остановился на лакхе; нет он шептал дальше до тех чисел, которыми можно считать все, начиная от зерен на поле и до самой мелкой песчинки. Потом он перешел к катхе, к счету звезд ночных, к кати-катхе, счету морских капель, и далее к счету песчинок Ганга и к счету, единицами которого изображается весь песок десятка лакх рек таких, как Ганг. Затем пошли еще более громадные числа... и, наконец, число, при помощи которого боги вычисляют свое прошедшее и будущее *).

Lalitavistara (жизнеописание Будды) даетъ даже число атомов в иожане (=3200 длин лука): оно равно 108,470,495,616,000.

„Псаммит" Архимеда. Задача выполнения неопределенно далеко простирающегося счета, которую поставили и разрешали индийские мудрецы за несколько столетий до начала нашей эры, перешла и к эллинам.

Под индийским влиянием, может-быть, написано знаменитое сочинение Архимеда: „Псаммит или исчисление песку в пространстве равном шару неподвижных звезд" **). Но задача, которая на индийской почве явилась удовлетворением простого любопытства, имеет в творении греческого мудреца высокое научное значение.

Псаммит Архимеда имеет целью доказать, что в противность мнению тех, которые думают, что

*) Свет Азии—перевод А. Анненской, стр. 8—9.

**) Русский перевод этого сочинения издан в 1824 г. Ф. Петрушевским.

число песчинок бесконечно и не может быть сосчитано, нетрудно составить понятие о таких числах, которые больше числа песчинок, вмещающихся в пространстве равном величине не только Земли, наполненной песком со всеми своими пропастями и глубиною морскою, даже до вершин высочайших гор, но и целого мира или шара неподвижных звезд.

Мир для Архимеда шар, которого центр в Земле, радиус же равен разстоянию от центра земли до центра Солнца; поперечник шара неподвижных звезд меньше десять тысяч раз взятого поперечника мира.

Чтобы решить поставленную себе задачу, Архимед показывает, на основании предположений современных ему астрономов и собственных наблюдений над величиною видимого поперечника Солнца, что поперечник мира меньше ста мириад мириад стадий (мириада—10.000; греческая стадия имела в себе 504 фута $4\frac{1}{2}$ дюйма). Относительно величины песчинок он делает предположение, что число песчинок, содержащихся в количестве песку не больше макового зерна, будет не больше мириады, и что поперечник макового зерна не меньше сороковой части дюйма (греческий дюйм был немного больше $\frac{3}{4}$ нашего). После этих предположений Архимед переходит к изложению своей номенклатуры чисел.

Числа от единицы до мириады мириад (от 1 до 10^8) называются первыми; мириада мириад первых чисел (10^8) называется единицею вторых чисел, и вторые числа идут от этой единицы до мириады мириад этих единиц (от 10^8 до 10^{16}). Мириада мириад вторых чисел называется единицею третьих чисел и третьи числа идут до мириады мириад этой единицы (от 10^{16} до 10^{24}).

Подобным же образом будем продолжать назы-

вать следующие числа даже до мириады мириад чисел мириадомириадных. Все эти числа называются числами первого периода и последнее из них (очевидно, равное $\left(10^{8.10^8}\right)$ или единице с восемью стами миллионов нулей) назовем единицею второго периода, и опять мириаду мириад первых чисел второго периода $\left(10^{8.10^8 \cdot 10^8}\right)$ назовем единицею вторых чисел этого же периода и т. д. Подобным же образом вводятся единицы чисел третьего $\left(10^{2.8.10^8}\right)$, четвертого $\left(10^{3.8.10^8}\right)$, пятого периода $\left(10^{4.8.10^8}\right)$ и т. д. даже до мириады мириад чисел мириадомириадных периода мириадомириадного $\left(10^{10^{8.10^8}}\right)$.

Последнее число изобразится единицею с восемьюдесятью тысяч миллионов нулей; чтобы написать его, нужно потратить около 2.000.000.000 лет непрерывной работы днем и ночью.

Архимед показывает, что, для решения поставленной им себе задачи об определении числа песчинок в шаре мира или даже в шаре неподвижных звезд, нет никакой необходимости в столь громадных числах. Последовательно вычисляет Архимед число песчинок в шаре, поперечник которого равен ста дюймам, в шарах с поперечником в мириаду дюймов, сто стадий, мириаду стадий и т. д. и т. д., постоянно пользуясь свойством геометрической и арифметической прогрессии, в котором можно видеть начало теории логарифмов, и, доходя до шара мира, показывает, что число песчинок, в нем заключающихся, выражается числом меньшим „тысячи единиц чисел седьмых“ (10^{51});

число песчинок, заключающихся в шаре неподвижных звезд, меньше тысячи мириад чисел восьмых (10^{63}).

Трудно указать в математической литературе сочинение, которое превосходило бы Псаммит Архимеда по интересу, смелости и богатству заложенных в нем идей. Оно развивало понятие о бесконечно-большом, подобно тому, как в своих сочинениях о квадратуре параболы объ измерении круга Архимед касался понятия о бесконечно-малом, лежащем в основании современного анализа.

Псаммит Архимеда ввел в науку *понятие о безконечно-продолжающемся ряде целых положительных чисел.* Многотрудная работа человеческого духа была окончена.

Ряд целых положительных чисел, бесконечно продолжающихся, — предмет благоговейного удивления для индусов и таинственного толкования для мудрецов Вавилона и пифагорейцев, явился могущественным орудием для познания природы.

Исходя из него, чистая математика строит понятие о дробном, отрицательном, несоизмеримом, комплексном числе, и это обобщенное понятие о числе составляет единственный объект чистой математики, которая может поэтому быть названа „арифметикою". „*Арифметика,*—говорит Гаусс,—*стоит в том-же отношении к математике* (включая, в нее геометрию и механику), *в каком последняя стоит к изучению природы. Математика есть царица наук и арифметика есть царица математики*".

II.

Числовая мистика.

Только внимательное изучение языков и преданий отживших или современных диких народов может дать нам сведения о первых ступенях развития понятия о целом числе и способности счисле-

ния. Те письменные памятники, которые дошли до нас из глубокой древности, знакомят нас с более высоким уровнем арифметических знаний, указывают, например, напонимание важности возвышения в квадрат и извлечения квадратного корня. Эти письменные памятники принадлежат двум древним цивилизациям, влияние которых и теперь еще ощущается. Наше деление времени на часы, минуты и секунды связано с числом 60, которое имело особое значение в древней Вавилонской или точнее сумерийской культуре, и ведет оттуда свое начало. Греческая научная мысль, которая уже ставила те основные вопросы математической философии, которые за последние сто лет привлекали к себе внимание Больцано, Г. Кантора, Пуанкаре, Ресселя и многих других, построена была несомненно на фундаменте эмпирических знаний, накопленных в течение столетий египетскими жрецами. Писатели II и III веков по Р. Х, которым была еще доступна богатая научная литература, погибшая в пожарах Александрии и Пергама (Теон Смирнский и Порфирий) различали математические направления Вавилона и Египта. „Египтяне,—говорят они,—при изучении планетных движений пользовались методом черчения, между тем как халдеи предпочитали вычисления". Дошедшие до нас в небольшом числе письменные памятники подтверждают это указание.

Уже в Египте Древнего царства эмпирическая геометрия видимо сделала большие успехи. Только благодаря этому могли быть воздвигнуты грандиозные пирамиды-гробницы фараонов Династии (3000 л. до Р. Х.). То обстоятельство, что во всех древних пирамидах угол наклона боковой грани к основанию имеет одну и ту же величину близкую к 52^0 и что tang. 52^0 весьма близок к π (Архимедово число) привело Prince Smith к гипотезе, что пирамиды как

своей ориентацией, так и размерами всех своих внутренних камер символизировали высокие математические знания того времени подобно тому как позже (припомним одну из глав „Notre Dame de Paris" Виктора Гюго: Ceci tuera cela) строители Парижского Собора символизировали в нем свое религиозное и философское миросозерцание. Но дошедшие до нас письменные памятники относятся уже к более поздней на тысячу лет эпохе, к эпохе XII Династии (Среднее Царство) (XVIII в. до Р. Х.) и нисколько не подтверждают фантастическую гипотезу пирамидалистов.

Наиболее древним из этих памятников являются шесть кахунских кусков папируса с задачами из обыденной жизни, но и в нем уже встречается извлечение квадратного корня. Вторым по древности является большой, но неполный папирус коллекции Голенищева (Москва), заключающий в себе 19 задач из разных отделов математики с несколькими чертежами, например, с чертежем вычисления объема усеченной пирамиды *). Третий (Берлинский папирус 6619) содержит также задачи, приводящие к решению квадратного уравнения.

Наиболее крупный математический памятник Египта—папирус Райнда, переписанный некием Яхмосом с образца старых рукописей времени Аменехмата III (2200 л. до Р. Х.) на 200 лет позже папируса Голенищева. Он носит название „наставление как достигнуть знания всех темных вещей, всех тайн, содержащихся в предметах". Папирус и перевод его тщательно издан в Лейпциге Эйзенлором и изучение его потребовало от издателя пятилетнего

*) Снимок с двух столбцов этого папируса помещен в начале статьи. Папирус находится в Московском Музее изящных искусств и в настоящее время профессор Б. А. Тураев подготовляет его издание.

напряженного труда *). Отметим в этом сочинении, имеющем громадное значение для истории практической арифметики, приведение всех дробей к дробям с числителем 1 и геометрическую прогрессию с знаменателем 7. Наш известный египтолог, академик Б. А. Тураев так характеризирует египетское знание: „Теория и систематика родились не на востоке, выводы из опыта и наблюдения были чужды Египту едва-ли не в большой степени чем другим областям востока, а потому до самого последнего времени здесь переписывались старые медицинские рецепты, не точные арифметические задачи, поверхностные и приблизительные геометрические выводы". Высокое уважение к письменности, к книгам („их следует любить как родную мать" **), к учению и школе („один день в школе полезнее вечности, проведенной вне ее"), которое внушали отцы детям, учителя ученикам обосновывалось тем значением, которое знания имели для чиновничьей карьеры („только чиновник сам себе начальство").

Иной характер носила математика другой древней цивилизации, родина которой было междуречье Тигра и Евфрата, та Месопотамия, которая представляет собою теперь пустыню. От этой Вавилонской или сумерийской культуры (раньше она называлась халдейскою) дошел до нас математический памятник, превосходящей своею древностью Московский папирус — глиняныя таблички, найденные в развалинах Сенкере и которые, по мнению ассирологов, относятся к времени за 2400 л. до Р. Х. На них клинообразными письменами начертаны таблицы квадратов и кубов.

Мнения ученых по вопросу о том, для какой цели

*) Благодаря В. В. Бобынину мы имеем на русском языке обстоятельное изложение в книге „Математика Египтян".

**) Эта цитата, как и две следующие взяты из папируса озаглавленного „Премудрость".

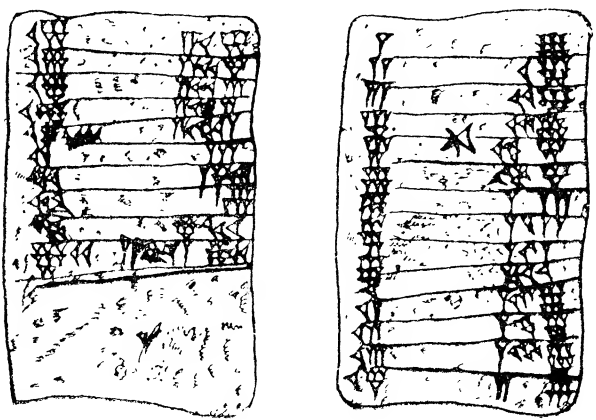
служили эти таблицы, расходятся. Они могли служить для вычисления площадей и объемов, но возможно, что и они находятся в связи с тем числовым символизмом, который повидимому ведет свое начало от сумерийской культуры и который затем проник и привился и на западе у евреев и греков и на востоке в Китае *). Не случайно совпадение значения числа 6 в сумерийской культуре и то магическое значение, которое одинаково приписывалось числу 36(= 6^2) и в Пифагорейской школе (под именем Tetractys) и в Китае.

Подобно тому, как химия и астрономия многим обязаны алхимии и астрологии и долго еще во времена Кеплера и Парацельса находились под влиянием поисков философского камня и гороскопов, так и науке о числах предшествовал длинный период развития человечества, в котором числам придавалось магическое значение и рождались те числовые суеверия, от которых не свободен иногда даже образованный человек (13!). Родиною этих числовых суеверий, повидимому, была долина Тигра и Евфрата. До нас вместе с табличкою квадратов и кубов дошла найденная в развалинах библиотеки Ниневии глиняная табличка и список имен богов и соответствующих их значению в иерархии чисел от 1 до 60. Повидимому, духам приписывались на-

*) Вопрос о древности и происхождении Китайской цивилизации до сих пор представляется спорным. Последние раскопки повидимому подтверждают признававшуюся прежде фантастическою гипотезу Terrien de la Couperie (The western Origines of the early chinese civilisation. London. 1894) видевшего в Китайской цивилизации отклики Вавилонской. Можно считать теперь установленным, что 1) Китайские сведения о древности китайской культуры подтвердились раскопками, при чем древнейшие памятники относятся к 14—12 в. до Р. Х. 2) письмо китайское имеет много сходного в своих древних памятниках, с письмом сумерийским." (Сообщение профессора А. И. Иванова).

против дроби *). В памятниках сумерийской культуры мы встречаемся с действиями над громадными числами. Hilprecht опубликовал **) 31 математическую таблицу. Все до сих пор найденные таблицы относятся к делителям числа 60^4. Но одна таблица заключает в себе делители и частные числа $60^8 + 10.60^7$ т.-е. 195, 955, 200000000. Эти таблицы, конечно, служили и для астрономических вычислений, но и астрономия Вавилона служила астрологии ***).

Вавилонская астрология перешла к евреям и вместе с нею перешла вавилонская ангелология. В талмудическом трактате Хагига мы узнаем что



Вавилонская таблица квадратов и кубов

*) Lenormant. La magie chez les Chaldeens. Paris 1874.
**) The Babyl. Expedition of the Univers. of Pensylvania XX том. 1906.
***) Изучению астрономии вавилонян посвящено большое сочинение Kugler'a. Sternkunde und Sterndienst in Babel. 1909.

под каждым из 12 знаков Зодиака, имена которых вынесены из Вавилона, стоит по 30 архистратигов, под каждым из последних—по 30 легионов ангелов; в каждом легионе по 30 полковников, у каждого полковника по 30 подполковников, а у каждого подполковника по 365.000 звезды, и все созданы для Израиля! *).

Вавилонского происхождения и та числовая символика, которою полны некоторые книги Ветхого Завета, в особенности 7-я и 8-я главы книги Даниила и Апокалипсис—в Новом Завете. Наконец, вавилонского происхождения и так называемая гематрия, многочисленные примеры которой мы находим и в Ветхом Завете и в том же Апокалипсисе и в особенности в кабалистической еврейской литературе **), и в литературе гностиков. Страх перед священным и неизреченным именем Бога приводил к мысли заменить его другим словом и в выборе этого слова руководились тем, что сумма чисел, изображенных буквами этого слова, должна равняться сумме чисел, изображающих буквы таинственного имени. Позже эта гематрия применялась и в других случаях (число 666! Припомните Пьера Безухова, замышляющаго убийство Наполеона).

Как ни велико „греческое чудо" (выражение Ренана), оно не осталось без влияния более древних восточных цивилизаций. Это влияние было преувеличено Рётом в его „Geschichte unserer Abendländichen Philosophie", под влиянием которой было написано юношеское сочинение Морица Кантора „Mathematiche Beiträge zum Kulturleben der Völker"—1863.

*) Кн. С. Н. Трубецкой. Учение о логосе, стр. 327 и 369.
**) Franck. Histoire de la Cabale. Blau. Das judische Zauberwesen. 1898.

Напротив, Целлер в своем классическом труде: „Geschichte der griechischen Philosophie in ihrer geschichtlichen Entwickelung" отрицает всякое чуждое влияние на развитие греческой философии и М. Кантор в „Vorlesungen uber du Geschichte der Mathematik" примыкает к этому мнению. С другой стороны, однако, открытия последних десятилетий—раскопки Шлимана в Мизенах и Трое, Эванса на острове Крите—доказали с несомненностью влияние восточного искусства (Хеттитского?) на искусство Эллады. Трудно поэтому предположить, что и философская мысль и научные знания развились в Греции совершенно независимо от чуждых влияний, как это доказывал Целлер. Гениальность греческого духа проявилась в переработке воспринятого ими в 7 и 6 столетиях наследия веков египетской и сумерийской (может-быть, также индийской) культуры. Демокрит, знаменитый основатель атомистической философии, говорил, что его не превосходили даже египетские гарпенодавты (натягиватели веревки). Проведение перпендикуляра у египетских техников основывалось на свойствах священного прямоугольного треугольника с катетом 3 и 4.

Под влиянием египетской космогонии первый ионийский философ Фалес Милетский учил, что все произошло и состоит из воды *).

Поэтому едва ли можно считать малооснователь-ною гипотезу, что вавилонская числовая символика имела подобное же влияние на учения Пифагорейской школы, которая натуралистическому монизму ионийских философов, видевших „единое сущее" в воде, как Фалес, или в воздухе, как Анаксимен, противопоставила первое идеалистическое учение, искавшее это „единое сущее" в отвлеченных числах.

*) Paul Tannery. Pour l'histoire de la science helléne Paris p. 70 sq.

По тем скудным достоверным данным, которые дошли до нас от Аристотеля об учении полумифического Пифагора и его ближайших учеников, трудно, однако, точно формулировать это учение. Состоит ли все из чисел и вещи составляют сущность всех вещей, или же вещи составлены по образцу чисел и суть только копии чисел?

По мнению Целлера, эти две для нас столь различные формулировки могли совмещаться, число, которое почиталось пифагорейцами как причина мирового порядка, как божественная сила, управляющая миром, могло быть в то же время и отожествляемо с сущностью всех вещей. Такое значение числа не могло не влиять на изучение свойств чисел и поэтому несомненно, что в школе Пифагора зародилась научная арифметика. В пифагорейской таблице десяти противоположностей, которая сообщена Аристотелем в его метафизике, наряду с противоположностями: конечного и безграничного, единого и многого, покоя и движения, света и тьмы, мужского и женского, мы находим и противоположность четного и нечетного и загадочную противоположность квадратных и гетеромекных чисел. Гетеромекными числами считались числа, состоящие из двух множителей, отличающихся на единицу, т.-е. числа вида $n\ (n+1)$. Ганкель в талантливых очерках „История математики" высказывает предположение, что эта последняя противоположность заменяет противоположность между рациональным и иррациональным, открытие которой сделано, несомненно, в пифагорейской школе. Это открытие „иррационального" (невыразимого отношением между целыми числами) есть одно из величайших открытий человеческого ума и является основною истиною „чистой" математики в отличие от математики приближенной, которая имеет дело с приближениями всегда выражаю-

щимися дробями. Отношение **непрерывной** величины к ряду рациональных чисел есть в то же время один из основных вопросов философии математики, и без математического выражения непрерывной величины обобщенным понятием о числе, которое мы называем „иррациональным числом", невозможен был бы анализ бесконечно малых и основывающееся на нем математическое естествознание.

Математическое естествознание обязано Пифагорейцам и другим важным открытием—установлением зависимости между высотою звука и длиною звучащей струны, сведением физического явления на отношение между числами. От этого открытия шли две дороги, и обеими дорогами пошла греческая мысль. Одна—путь наблюдения и опытного исследования явлений и подведение их под числовые закономерности. Этим путем пошли великие греческие ученые Эвдокс, Эратосфен, Архимед, изучавшие движение светил, форму Земли, потерю веса в воде. Но был и другой путь. Если звуковая гармония соответствует отношению между числами гармонической пропорции a—b : b—c=a:c, то нельзя ли выразить числами и отношениями между числами и гармонию движения небесных сфер и все вещи в мире и даже мир духа? В квадратном числе равное умножается на равное. Не есть ли поэтому квадратное число — символ справедливости? Различие между первыми четными (2) и первыми нечетными (3) не соответствует ли различию между мужским и женским, и поэтому сумма их 5 не есть ли символ брака? Числа 10 и 36 суть суммы первых четырех и первых восьми чисел и имеют многие замечательные свойства, и им приписывалось поэтому священное значение (большая и меньшая Tetractys). Эта числовая мистика, которая, как мы видели, встречается уже и в сумерийской культуре,

сделалась основой и философского мировоззрения пифагорейской школы и имела громадное влияние и на величайшего греческого мыслителя Платона (429—348), который особенно в последних произведениях отожествлял свои „идеи" с „числами" Пифагорейцев. Во многих диалогах Платона особенно в Тимее, мы встречаем числовые аллегории и многие из них до сих пор представляются неразрешимыми загадками. Таково, например, так называемое „брачное число" 8-й книги Политии, число лет периода счастливых и несчастных браков, которое должно быть известно законодателям. Неясность математических терминов приводит к самым различным толкованиям. Одни считают Платоново число равным 10^4 (Kugler *), другие видят в нем священное число Вавилона 60^4 (Hultsch **). Tannery считает его равным 2700, Albert ***) 2592. Loria (Le scienze esatte nell'antica Grecia. 1902) дает шестнадцать значений (отъ 50 до 12960000), которые приписывались Платоновому числу. Еще большее развитие получила числовая мистика в Александрии, в городе, в котором столкнулись три цивилизации: египетская, еврейская, носившая в себе большие следы влияния Вавилона, и греческая.

Александрия, как культурный центр, затмил Афины. В Александрии возникла Новая Академия, в Александрии явились философские школы, которые старались примирить разнообразные философские направления Греции не только между собою, но и с миросозерцанием восточных цивилизаций. Одна из них, связанная с именем Аполлония Тианского, старалась подкрепить свое эклектическое учение авторитетом Пифагора. У неопифагорейцев формы Аристотеля, „семенные логосы" стоиков, создающие и

*) Sternkunde und Sterndienst in Babel. 1909 II Bd. S. 35.
**) Zeitschrift für Mathematik. 1882. Histor. Abtheil. 41-60.
***) Die Platonische Zahl. Wien 1896.

образующие всю телесную природу, обратились в числа. В тесной связи с Неопифагорейскою школою находились и два математика, о которых мы будем говорить дальше: Никомах Геразский и Теон Смирнский. Первому из них приписывается сочинение: „Арифметическое Богословие". В нем подробно изучаются числа от единицы до десяти с целью доказать их глубокое значение и божественную природу. Единица есть разум, добро, гармония, счастье и в то же время материя, тьма, хаос; она соединяет в себе четное с нечетным и мужеское с женским. Два—есть начало неравенства, противоречия, оно есть мнение, ибо в мнении встречается истина с ложью. Три есть первое настоящее число, так как оно имеет начало, середину и конец и поэтому есть число совершенства *). Оно есть единственное число, равное сумме предыдущих. Такими же бреднями полны сочинения виднейшего представителя греко-еврейской философии, предшественника Талмуда александрийца Филона **) (30 до Р. Х.—41 после Р. Х.) Несколько страниц посвящены свойствам числа 120, которое по книге Бытия было продолжительностью жизни людей после потопа. Оно есть сумма первых 15 чисел, 15-е треугольное число, равно сумме треугольного числа 15, квадратного числа 25, пятиугольного 35 и шестиугольного 45; оно имеет 15 делителей, сумма которых равна удвоенному числу 120, что имеет очевидное отношение с двойственностью жизни, жизнью духа и жизнью тела и т. д. и т. д. Еврейская Каббала в значительной степени основывалась на сочинениях Филона. Древнейшее из сочинений Каббалистиче-

*) В диалектике Гегеля и в Анти-Дюринге Энгельса мы встречаемся с тем же древним мотивом.

**) О нем подробно говорит кн. С. Н. Трубецкой в „Учении о Логосе" Москва, 1906. „Арифметическое Богословие" издано в 1866 г. известным филологом Hoche.

ской литтературы Jesira считает основоначалами вселенной 10 чисел и 22 буквы; те и другие находятся на границе мира чувственного и мира умопонимаемого *).

Историки философии придают большое значение школе неоплатоников, сочинения которых пользовались громадным влиянием в эпоху Возрождения и которая в III-- V столетиях после Р. Х. являлась сильнейшим соперником христианства по своему влиянию на умы. В царствование Юлиана Отступника неоплатонизм явился на короткое время официальною религиею Римского Государства, и одною из интереснейших исторических проблем есть вопрос о причине его поражения и победы христианства. После основателя Неоплатонизма, Плотина, наиболее видным представителем школы является Ямблих, за одно послание которого император Юлиан был готов отдать все золото Лидии. Ямблих оставил сочинение в 10 книгах под заглавием „собрание Пифагорейских учений" и одна из этих книг, 4-ая, посвящена арифметике. Уже у Филона мы находим учение о Троице (три божественные силы: доброта, могущество, Слово (Логос); в языческом богословии Ямблиха троица имеет еще большее значение. Числа его ангелологии напоминают числа ангелологии Вавилона и евреев. Вообще его арифметика — комментарий на выше упомянутое „Арифметическое Богословие"—проникнуто уважением к символическому характеру Математики. В математических формах Ямблих видит символ высших истин, из них познается природа вещей и сверх-чувственного мира, отношение чисел и фигур к отдельным божествам.

После кратковременного торжества Неоплатонизма при Юлиане Отступнике он долгое время

*) Lasswitz. Geschichte der Atomistik I. p. 188.

оказывал косвенное влияние на христианское богословие и в особенности на гностиков. В эпоху Возрождения он приобрел снова еще большее влияние на умы. В философских трудах Николая Кузанского, Джиордано Бруно, в астрономических сочинениях Кеплера в химических — Парацельса мы находим отзвуки числовой символики. Так Николай Кузанский обожествляет единицу, так Михаил Стифель (1486—1567), видный алгебраик XVI столетия и фанатический лютеранин, найдя в сумме чисел, соответствующей фразе „Vae tibi, Papa, vae tibi", апокалиптическое число, подобно Архимеду, по преданию, выскочил в восторге не одетый на улицу.

В XIX столетии ни кто иной как знаменитый основатель Положительной Философии в конце своей жизни писал о „философских и религиозных свойствах чисел, которыми пренебрегают академические ученые". Святыми (sacrés) являются для него и единица и два и три и семь. *) С другой стороны и у Гегеля и даже у левых Гегелианцев—даже в Анти-Дюринге Энгельса,—мы встречаем тот же древний, ведущий свое начало от сумерийской культуры, мотив мистического уважения к тому или другому числу. Но уже и греческая мысль умела порвать с числовою символикою и выступила на путь научного изучения свойств чисел. К ознакомлению с главнейшими шагами по этому пути мы теперь и перейдем.

III.

Начало науки о числах.

„Необходимо не только путем убеждения, но и путем законодательства достигнуть того, чтобы те.

*) Systeme de politique positive t. III u Synthèse subjective. За философские заслуги числа семь Конт хотел сделать из него основание нумерации.

кто предназначен занимать первые должности в государстве, не поверхностно только изучали науку вычисления, но и достигали путем чистого разума созерцания сущности чисел",—говорит Платон в 7-ой книге своей „Политии" *). Такое высокое уважение к науке о числе было разделяемо и его ближайшими учениками, и многие из них обогатили эту науку новыми открытиями. *Евдокс Книдский* (409—356), приобревший славу геометра, географа, астронома, медика, философа и законодателя, наравне с Архимедом разделяющий заслугу изобретения метода исчерпания, расширил учение о пропорциях, прибавив к трем пифагорейским пропорциям (арифметической, геометрической и музыкальной) еще три новых. *Ксенократ* (397—314), известный своим изречением: „математика есть рукоятка философии", определил число слогов, которые можно составить из всех букв греческого алфавита, т.-е. решил один из вопросов комбинаторного анализа. Преемник Платона в руководстве Академией *Спезипп* оставил небольшой, но весьма интересный трактат о „пифагорейских числах", перевод которого можно найти в „Memoires scientifiques" П. Таннера (т. I стр. 281). Наконец, „il maestro di color che sanno", *Аристотель* (384—322) во многих местах своих многочисленных астрономических, физических, естественно-научных, философских сочинений приводит результаты или выводы, принадлежащие к области математики и в частности учения о целом числе **). Но гораздо большее значение имеют некоторые его взгляды, касающиеся вопросов философии матема-

*) Об отношении Платона к математике написано две монографии: Blass. De Platone mathematico Bonn 1861 и Rothlauf. Die Mathematik zu Platons Zeiten und seine Beziehungen zu ihr. München 1878.

**) В XVII столетии иезуит Бианкини собрал соответствующие места в брошюре Aristotelis loca mathematica.

тики и в которых он является гениальным предшественником Больцано и Кантора. Аристотель различает актуальную бесконечность от бесконечности потенциальной, он понимает различие между пересчитыванием бесконечно многого (перечислимое множество Г. Кантора) и движением через бесконечное множество точек (континуум).

После смерти Аристотеля развитие науки о числе связано с городом, носящим имя его знаменитаго ученика. Александрия, о значении которой для истории философии мы говорили выше, имеет не меньшее значение и в истории науки. В течение более семи веков (322 до Р. Х.—год смерти Аристотеля и Александра—415 г. по Р. Х. год убийства знаменитой Гипатии фанатическою христианскою толпою и разгрома философских школ) она служила центром философской мысли и научной работы, она была городом-светочем (ville lumière) подобно Парижу за последние два столетия.

В своем прекрасном „очерке истории физико-математических наук", который и до сих пор представляет большой интерес и в скором времени сделается доступным широким кругам русского общества, П. Л. Лавров различает три периода в умственной жизни Александрии: 1) 300 до Р. Х.—150 до Р. Х.; 2) 150 до Р. Х.—100 после Р. Х. и 3) 100 после Р. Х.—400 после Р. Х. Первый период—блестящая эпоха истории математики. Тогда в Александрии работали Евклид и Эратосфен, учился Аполлоний Пергийский; третий великий греческий математик Архимед находился в тесной связи и постоянной переписке с Александрийскими учеными и этотъ третий период также весьма важен для истории учения о целом числе.

В этом периоде жили Никомах Геразский и Теон Смирнский и вероятно в самом конце этого периода „отец алгебры и арифметики" Диофант Александрий-

ский *). За исключением Библии ни одна книга не подвергалась стольким переработкам и не имела столько изданий, как 13 книг Начал Евклида. Изучение ее и теперь должно быть обязательным для математика-педагога и для математика, интересующагося или философскими основаниями своей науки или ее историею. Начала Евклида представляют, повидимому, свод всех успехов в области геометрии и арифметики, которых достигла греческая мысль к началу александрийского периода. В них дано строгое обоснование геометрии аксиомами и постулатами, которое до последнего времени считалось образцовым и незаменимым, и на этих основах построено систематическое изложение истин планиметрии и стереометрии, завершающееся в последней теореме последней книги доказательством существования пяти правильных многогранников — космических тел пифагорейской школы. Но и для чистой математики, для учения о числах и операциях над ними, Начала имеют не меньшее значение. Вторая книга Начал есть алгебра, облеченная в геометрическую форму. По ней можно отчетливо и ясно выяснить связь между алгеброю и геометриею, и поэтому ее изучение представляет большой педагогический интерес теперь, когда справедливо обращено внимание на „фузионизм" в преподавании алгебры и геометрии в средней школе.

В Началах резко проведено характерное для греческой математики различение величины (мегете) и числа (аритмос). Числом для греков было сначала (у Евклида) только целое (позже также и рациональное у Диофанта). Это различение было резуль-

*) P. Tannery в своеи статье „A quelle époque vivait Diophante" доказывает, что Диофант жил не в IV столетии, как считали ранее, но в третьем, и был современником Паппуса, т.-е. жил за 100 лет до Теона Александрийского и его дочери Гипатии. (Mémoires scientifiques. t. 2—p. 62).

татом глубокой работы мысли. Мы видели (см. II), что пифагорейская философия склонна была уподоблять вещи целым числам. Но пифагорейцы-математики открыли иррациональные (невыразимые отношением между целыми числами) отрезки. Необходимо после этого было ввести или понятия о пределе, бесконечно большом, бесконечно малом, или резко различить величину непрерывную от величины раздельной (дискретной, выражаемой целыми числами). Трудности, связанные с первым путем, ясно сознавались греческими математиками особенно под влиянием апорий, выдвинутых философами-элеатами (Парменидом и в особенности Зеноном) и они избрали второй. Соответственно этому мы находим в Началах 5-ю книгу, в которой приводится систематическое учение о пропорциях между величинами и три книги (7, 8 и 9-я), которые посвящены учению о целых числах и в которых свойства пропорций снова самостоятельно доказываются для целых чисел. Эти три книги составляют таким образом рациональную арифметику древних *).

Седьмая книга начинается с определений, которыми Евклид пользуется затем во всех арифметических книгах. Последовательно определяются единица, число, часть $\frac{1}{n}$, дробь $\frac{m}{n}$, кратное, числа четные, нечетные, четно-четные, четно-нечетные, нечетно-нечетные, простые числа, числа взаимно-простые, числа сложные и числа взаимно-сложные, числа плоскостные (ab), числа телесные (a b c), наконец числа пропорциональные, подобные и нако-

*) Следующая за ними 10-я книга, одно из наиболее глубокомысленных творений греческого ума, может быть названа иррациональною арифметикою. В переводе Начал изданном проф. Ващенко-Захарченко, к сожалению, отсутствует перевод 7, 8 и 9-й книги. Поэтому я несколько подробнее остановлюсь на их содержании.

нец совершенные. Последняя (36-я) теорема 9-ой т.-е. последней из арифметических книг заключает в себе доказательство того, что числа вида $2^n(2^{n+1}-1)$ суть числа совершенные, если число $2^{n+1}-1$ есть число абсолютно-простое. Этот конец Евклидовой арифметики является также доказательством тесной связи научной арифметики с числовою символикою, в которой еще со времен Вавилона первое совершенное число 6 играло большую роль.

Теоремы седьмой книги начинаются с теоремы, громадное значение которой выясняется всей историей учения о целом числе и в особенности созданной Куммером, Кронекером и Дедекиндом теориею целых алгебраических чисел (см. дальше). Мы изложим ее поэтому придерживаясь возможно ближе подлинника. „Если из двух неравных целых чисел последовательно меньшее вычитается из большего и остаток до тех пор не измеряет точно предыдущего пока он не равен единице, то данные „числа суть числа между собою взаимно-простые". Алгорифм (ряд операций), который дается в этой теореме, носит справедливо название Евклидова алгорифма нахождения общего наибольшаго делителя. Две следующие теоремы (2 и 3) доказывают действительно, что этот алгорифм приводит к нахождению общего наибольшего делителя двух или большего числа целых чисел. Теоремы 4—22 посвящены частям и дробям и в арифметической форме для целых чисел доказывают теоремы в 5-ой книге данные для отношений и пропорций между величинами.

Теоремы 23—30 излагают свойства чисел взаимно-простых между собою. Так например теорема 24 (в издании Гейберга) говорит, что, если числа A и B суть числа взаимно-простые с C, то и произведение AB есть взаимно-простое с C. По теореме 31 каждое сложное число делится на какое-либо простое и по теореме 32 каждое число есть или

простое или делится на простое. Конец книги учит выражать отношения в наименьших числах и находить наименьшее кратное двух или более чисел.

В восьмой книге продолжается учение о пропорциях, рассматриваются свойства непрерывной геометрической пропорции и средней пропорциональной и наконец вводятся и изучаются числа, которым по их геометрическому значению приписывается название плоскостных, квадратных, телесных.

В 9-ой книге изучаются пропорции и прогрессии и в ней особенное внимание прежде всего заслуживают две теоремы. По теореме 12-ой, если числа 1, А, В, Г составляют геометрическую прогрессию и Г делится на простое число Е, то и А делится на Е. Теорема 20-я содержит знаменитое доказательство бесконечности простых чисел. Далее рассматриваются свойства четных и нечетных чисел, их сумм и произведений. В 35-ой теореме суммируется геометрическая прогрессия, и книга (а с нею вместе и арифметика целых чисел) заканчивается как мы уже указали, доказательством, что числа вида 2^n, $(2^{n+1}-1)$ суть числа совершенные.

Таково содержание той части Начал Евклида, которая излагает незыблемые и до сих пор основания теории целых чисел. Нельзя не пожелать, чтобы три арифметические книги были бы изданы отдельно и могли бы служить пособием при преподавании того курса теоретической арифметики, который должен заканчивать курс математики обязательный для всех получающих среднее образование *).

*) В переводе „Начал", изданном проф. Ващенко-Захарченко, пропущены именно арифметические книги. Ф. Петрушевский в 1819 г. издавший в переводе на русский язык „Евклидовых начал 8 книг, а именно первые шесть, одиннадцатую и двенадцатую" в 1835 г. издал „Начал три книги, а именно седьмая, осьмая и девятая, содержащие общую

Из нашего слишком краткого по недостатку места изложения арифметики Евклида мы видим, что оно представляет собою исключительно теорию делимости целых чисел в связи с теориею пропорций и прогрессий. Отсутствуют приложения к решению конкретных задач с определенными числами и притом теоремы иллюстрируются не числовыми примерами, но линиями. Этот исключительно теоретический характер трех арифметических книг объясняется тем различием, которое под влиянием Пифагорейской школы проводилось греками между теоретическою и практическою арифметикой. Только первая была Арифметика, вторая носила название логистики. „Пифагор поставил выше всего арифметику, освободивши ее от служения коммерческим интересам и стал рассматривать все вещи под формою числа!" пишет один из перипатетиков Аристоксен. Платон в диалоге „Горгиас" противопоставляет логистике арифметику. Подробнее, ссылаясь на Геминуса, развивает Прокл, математик V ст. в своих комментариях на Евклида, различие между теоретическими науками, геометриею и арифметикою, и практическими,—геодезиею и логистикою. Первые занимаются воспринимаемым разумом, вторые—воспринимаемым чувствами. Арифметика разделяется на теорию чисел линейных, плоскостных и телесных и рассматривает образование чисел. Напротив. логистика рассматривает свойство

теорию чисел древних геометров". В XVIII ст. Евклид был издан на русском языке в 1739, 1769 и 1789 г. Лучшими изданиями Евклида считается—английское издание Gregory (Oxford 1702), французское издание Peyrard (Paris 1808) и издание Heiberg'a (на греческом и латинском языках (Лейпциг 1-84). В английской литературе имеется весьма большое число изданий Евклида, приноровленных к преподаванию в средней школе. Список различных изданий и переводов Евклида приложен к переводу проф. Ващенко-Захарченко.

чисел не самих по себе, но по отношению к чувственным предметам. Она рассматривает, с одной стороны, подобно Архимеду, задачу о быках, с другой стороны числа μηλίτας и φιαλίτας (числа бутылочные и числа относящиеся к стадам). Соответственно такому взгляду все практические приемы счета и вычислений относились к логистике. Но такое философское пренебрежение к вычислениям не могло-быть долго выдержано. Не только потребности обыденной жизни, но и развитие астрономических наблюдений и основанных на них теорий требовало развития практики действий над большими числами и два великие геометра Архимед и Аполлоний Пергийский посвятили этому вопросу логистики свои исследования. В гл. I, читатель познакомился с Псаммитом Архимеда. Мы дополним сказанное немногим и прежде всего переводом интересного предисловия—обращения к Сиракузскому царю Гиерону: „Многие думают, царь Гиерон, что число песчинок бесконечно. Я говорю не только о песке кругом Сиракуз и во всей Сицилии, но о песке на всей суше, как обитаемой, так и необитаемой. Напротив другие не считают это число беспредельным, но думают, что нельзя указать число, которое бы его превосходило.

Тем более последние считали бы невозможным знать число, которое превосходило бы число песчинок в песчаной куче, равной по объему Земле, предполагая что им наполнены и все моря, и все впадины равно как и высочайшие горы. Я же постараюсь при помощи геометрических доказательств, с которыми ты не можешь не согласиться, показать, что между числами, мною указанными в послании к Цейксиппу находятся такие, которые превосходят число песчинок не только в куче равной по объему Земле, но и в такой, которая по своей величине равнялась бы вселенной. Ты знаешь, что

большая часть астрономов понимают под вселенною (космос) шар, центр которого есть центр Земли, а радиус равен расстоянию от центра Земли до центра Солнца. Но Аристарх Самосский уж письменно изложил гипотезу, по которой мир много больше, чем обыкновенно думают астрономы. Он предполагает, что звезды и Солнце неподвижны и что Земля двигается по кругу, в центре которого стоит Солнце. Шар неподвижных звезд, в центре кото-

Архимед (287—212 д. Х. Р.)

рого также находится Солнце, имеет поперечник в 10.000 раз больший чем мир астрономов". Архимед приходит к выводу, что число песчинок, заключающихся в шаре неподвижных звезд, меньше 10^{63}.

Чтобы прийти к этому результату он пользуется постоянно следующим свойством геометрической прогрессии: „Если мы имеем начинающийся единицей ряд чисел, составляющих геометрическую прогрессию, то произведение двух чисел этого ряда находится в той же прогрессии на таком же расстоянии от большего множителя, на каком меньший множитель находится от единицы; расстояние произведения от единицы меньше на единицу суммы расстояний множителей от единицы". Так как расстояние чисел геометрической прогрессии от единицы составляют арифметическую прогрессию, то очевидно, что правило Архимеда есть не что иное как то отношение между геометрическою и арифметическою прогрессиею которое может быть положено в основание теории логарифмов, как это, после предварительных шагов Стифеля и Стевина, было сделано Непиром.

Подобно Архимеду *) другой великий греческий геометр Аполлоний Пергийский интересовался важнейшим вопросом логистики, усовершенствованием способов вычисления больших чисел.

В книжке потерянной для нас, как и многие другие его сочинения, носившей причудливое название „скорое разрешение от бремени" (Окитокион) он по словам комментатора Эвтокия дал число π с бо́льшим приближением чем Архимед в сочинении „Об измерении круга". Паппус сохранил для нас способ, которым Аполлоний определил произве-

*) О приписываемой Архимеду задаче о быках (problema bovinum) будет сказано дальше.

дение всех чисел, представленных буквами одного греческого стиха.

Произведение это равно числу:

$$196036848.10^{64}.$$

При вычислени такого громадного числа Аполлоний пользовался рядом теорем, приводимых Паппусом, и которые дают правила для нахождения произведения двух рядов чисел $a.10^{l}$, $b.10^{l'}$, $c.10^{l''}$.... на $a'.10^{k'}$, $b.10^{k'}$....(Числа a, b, c,... a', b', c'... (Питмены—по терминологии Аполлония и Паппуса), суть числа ряда 1, 2, 3,... 9). Отдельно перемножались Питмены и складывались показатели l, l'.... k, k'....

В более тесной связи с арифметическими книгами Евклида, чем Псаммит Архимеда и Окитокион Аполлония стоит математическая деятельность знаменитого Александрийца географа Эратосфена (276—194).

После того как Евклидом было дано в 9-й книге доказательство существования бесконечного множества простых чисел, являлось естественным стремление возможно проще и скорее выделить эти простые числа, столь важные в теории целых чисел, из ряда чисел натуральных. Этой цели стремится удовлетворить так называемое решето Эратосфена *). Эратосфен занимался также теориею многоугольных чисел и написал не дошедший до нас комментарий к „Тимею" Платона, столь полному математическими аллегориями. Есть все основания предполагать, что простейшие из многоугольных чисел—треугольные были известны еще Пифагорейцам. Уважение к числу 10 основывалось между прочим и на том, что оно есть треугольное

*) См. мое „Введение в Анализ", вып. I.

**) Способ Эратосфена может быть значительно усовершенствован, как показали Эйлер и в последнее время Дормуа и П. С. Порецкий, работа каторого напечатана в „Известиях Казанского Физикоматематического Общества".

число. О многоугольных числах писал ученик Сократа и Платона Филипп Опунтиус, но мы видели, что Евклид в своих арифметических книгах говорит только о квадратных числах.

Общее определение n — угольного числа (сумма членов арифметической прогрессии, которой первый член есть 1, а разность равна n—2) дано Гипсиклом Александрийским, жившим во II столетии до Р. Х. Теории этих чисел отведен почти одна треть

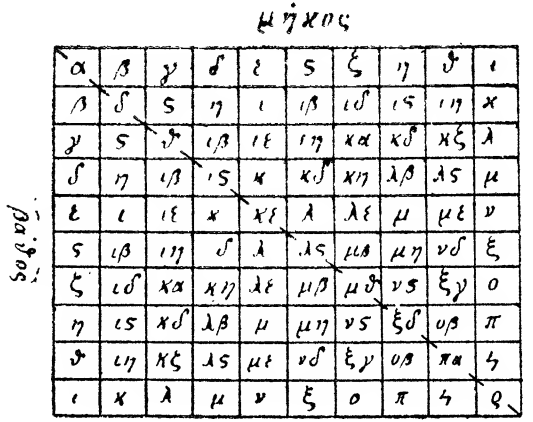


Таблица умножения из сочинения Никомаха „Изагоге".

одного из важнейших математических сочинений древности: — Isagoge или Введение в изучение арифметики — Никомаха Геразского, жившаго уже в третий период научной истории Александрии.

Сочинение это, к сожалению, мало доступно изучению *); сравнительно подробное изложение его

*) Напечатанное в первый раз в Париже в 1538 г., оно затем было переиздано в 1817 г. Ast'ом и в 1866 г. Hoche'ом в Германии. Но и то и другое издание содержит только греческий текст без комментариев.

можно найти в прекрасном сочинении Нессельмана: Die Algebra der Griechen 1842 г., до сих пор еще не потерявшем своего значения. „Введение" Никомаха разделено на две книги. Первая из них представляет меньший научный интерес. В ней можно отметить однако разделение четных чисел на числа вида 2^n, 2^n $(2m+1)$, и 2 $(2m+1)$, введение чисел недостаточных и избыточных и таблицу умножения в виде квадрата, разделенного на клетки. 2-я книга посвящена теории фигурных чисел и теории пропорций. Из числа теорем относящихся к фигурным числам отметим две: 1) всякое многоугольное число равно сумме многоугольного числа предыдущего названия, но занимающего в ряду то же место и треугольнаго числа, занимающаго предшествующее место (четвертое семиугольное число (34) равно сумме четвертого шестиугольного с третьим треугольными (28 + 6); 2) если разобьем ряд нечетных чисел на группы, число членов в которых будет возрастать как ряд натуральных чисел, то сумма членов каждой группы равна кубу числа членов каждой группы ($1^3 = 1$, $3 + 5 = 2^3$, $7 + 9 + 11 = 3^3$ и т. д.). От многоугольных чисел Никомах переходит к пирамидальным числам, получаемым через суммование многоугольных чисел и наконец рассматривает также числа кубические (m^3), числа балкообразные $[m^2 (m + n)]$, числа кирпичеобразные $[m^2 (m — n)]$, числа клинообразные, шарообразные, параллелепипедные.

В учении о пропорциях, которое по словам Никомаха „необходимо для естествознания, для музыки, сферической тригонометрии и планиметрии, но в особенности для понимания старых писателей", сначала рассматриваются три пропорции, найденные еще в школе Пифагора, т.-е. пропорции арифметическая, геометрическая и гармоническая. Отметим здесь следующие теоремы: 1) в непрерывной ариф-

метической пропорции a-b=b-c разность между квадратом среднего члена и квадратом постоянной разности равна произведению средних (эту теорему для нас столь простую Никомах называет прекрасною и никем не замеченною) и 2) если три числа, расположенные по убывающим величинам, составляют пропорцию, то частное от деления первого на второе меньше, больше или равно частному от деления второго на третье, смотря по тому, имеем ли мы пропорцию арифметическую, гармоническую или геометрическую. Далее Никомах рассматривает семь других пропорций: три пропорции Евдокса Книдского и четыре пропорции, дополненные впоследствии и наконец одиннадцатую совершеннейшую, ибо она включает в себе прочие и находит многие приложения как в естествознании, так и в музыке. Таковы наиболее важные и интересные в историческом отношении места сочинения Никомаха. Историки математики не сходятся в оценке его научного значения. В то время как Нессельман придает большое значение тому, что в „Изагоге" арифметика впервые излагается независимо от геометрических представлений и теоремы учения о числах проверяются на числах, но не на линиях, как у Евклида, Поль Таннери *) находит взгляд Нессельмана излишне благоприятным. „Никомах не математик, потому что математик не мог бы включить в книгу те детски простые теоремы, которые находятся у Никомаха. Никомах — философ, который пишет об арифметике для изучающих философию. Поэтому в его книге почти отсутствуют доказательства и теория сводится к обобщению индукции". Но каковы бы ни были недостатки сочинения Никомаха, оно несомненно имеет большое историческое значе-

*) См. статью о Домнносе Ларисском, математике в конце V столетия в Memoires scentifiques publies pas Heiberg et Zeuthen Paris 1912. Vol II. p. 108.

ние и пользовалось громадною популярностью. „Считать как Никомах Геразский" было долго похвалою. Во время Ямблиха (IV столетие) книга Никомаха была столь же классическою для арифметики, как Евклид для геометрии. Позже Прокл, который считал что в нем живет душа Никомаха, писал комментарий на Изагоге. Латинский перевод Изагоге, сделанный Боэцием, сделался почти на все средние века классическим руководством. Таким же уважением пользовалась книга Никомаха и у арабов.

Другой математик, связанный подобно Никомаху своими философскими воззрениями с школою Пифагора и с Платоном, Теон Смирнский (II столетие после Р. Х.) посвятил арифметике одну из книг своего сочинения „Что нужно знать из математики для того, чтобы понимать Платона". Доказавши, что „математика необходима" (гл. I) и определивши арифметику (2) и единицу *) (3), Теон рассматривает последовательно простые и сложные числа, четные и нечетные и их различные подразделения (главы 5—10) и затем переходит к числам квадратным, гетеромекным (гл. 11—18) и к числам треугольным, пятиугольным и шестиугольным (19—27). В главе 28 он доказывает, что квадратное число состоит из двух треугольных, главы 29 и 30 говорят о телесных и пирамидальных числах. Все эти главы, по мнению Нессельмана, далеко уступают соответствующим главам Изагоге Никомаха. Исторический интерес представляет 31 глава, посвященная „диагональным и боковым числам". Цель ее показать, что подобно тому как целые числа представляют свойства треугольников, квадратов, пятиугольников, и т. д. они могут выразить и отношение стороны и диагонали квадрата. Для того, чтобы найти такие числа, Теон Смирнский со-

*) „Единица не есть число, но только начало чисел"

ставляет два ряда целых чисел: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ и $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$ связанных равенствами $\alpha_n = \alpha_{n-1} + \delta_{n-1}$, $\delta_n = \delta_{n-1} + 2\alpha_{n-1}$; причем числа α_1 и δ_1 предполагаются равными единице. Таким образом получаются ряды чисел.

1, 2, 5, 12, 29, ... 985, 2.378
1, 3, 7, 17, 41, ... 1.393, 3.363

Отношения $\frac{\delta_n}{\alpha_n}$ попеременно больше или меньше отношения диагонали квадрата к его стороне. Между числами δ_n и α_n существуют, как показывает Теон на примерах, соотношения $\delta_n^2 - 2\alpha_n^2 = (-1)^n$

Мы имеем здесь первый дошедший до нас пример знаменитого уравнения Пелля, $T^2 - Du^2 = \pm 1$, которое было предметом многочисленных работ *), и на громадном значении которого в теории бинарных квадратных форм и в теории квадратичных числовых тел мы остановимся дальше. П. Таннери доказывает, что уравнение Теона рассматривалось еще Платоном. Приближение к $\sqrt{2}$ найденные Теоном суть не что иное как последовательные подходящие дроби к разложению в непрерывную дробь $\sqrt{2}$ и этот результат есть частный случай общей методы данной Лагранжем для решения уравнения Пелля, с помощью непрерывных дробей. В одной из глав сочинения Феона мы встречаем в первый раз магический квадрат.

1	4	7
2	5	8
3	6	9

*) Им посвящена особая монография: Конен. Geschichte der Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$. Leipz. 1901.

Задача магических квадратов с тех пор явилась одною из любимых тем в теории чисел. Она интересовала Ферма́та и Эйлера, после того как в средние века ею занимались Стифель, известный мистик Агриппа Неттесгеймский и знаменитый художник Альберт Дюрер.

Большою известностью пользовались в средние века и сочинения Ямблиха, о которых мы говорили выше, сочинения представляющие большой интерес для истории Неоплатонизма, этой религии грекоримской интеллигенции побежденной религиею бедноты, но их научный интерес гораздо меньше интереса книг Никомаха и Теона. Громадный и не преходящий научный интерес представляют напротив дошедшие до нас части сочинения знаменитого арифметика Греции Диофанта.

V.

Диофант.

Не только происхождение и обстоятельства жизни, но даже и точное определение времени деятельности Диофанта покрыты мраком неизвестности. По цитатам в его сочинении с одной стороны, по цитатам из его книги в других математических сочинениях можно установить два крайние предела и между этими пределами разница в 540 лет (от 180 г. до Р. Х. до 360 г. после Р. Х.) Наиболее авторитетные писатели относят его жизнь или к 3-му столетию после Р. Х. (M. Cantor) или к 2-му после Р. Х. (Поль Таннери, Лориа). Из сочинений Диофанта дошли до нас шесть книг его арифметики (из предисловия видно, что их было тринадцать) и небольшой трактат о многоугольных числах. Из арифметики видно, что он написал еще сочинение под заглавием Поризмы.

Из предисловия к арифметике видно, что она

была разделена на 13 книг подобно Началам Евклида и Альмагесту Птолемея. Вопрос о том, какая часть сочинения погибла, каково содержание недостающих семи книг занимал ученых, изучавших внимательно Диофанта. Одни думали, что погиб конец сочинения и что в нем заключалась или теория решения кубических и биквадратных уравнений (математик XVI столетия Бомбелли) или теория тройных уравнений как продолжение теории двойных уравнений данной в сохранившейся части сочинения (мнение Монтукля и Шульца). Напротив другие (издатель арабских математиков Колебрук, Нессельман, Ганкель, Хит) считают, что потеря сравнительно маловажна, что пропала часть сочинения между первою и второю книгою, заключавшая по мнению Нессельмана решение определенных уравнений 2-ой степени и неопределенных первой степени. Наконец Таннери и Лориа склонны думать, что погибшая часть сочинения представляла не меньший интерес чем дошедшая до нас и делают различные гипотезы относительно ея содержания *).

Из дошедших до нас рукописей на греческом языке Арифметики наиболее древняя находится в Ватикане и относится в XIII столетию. Арабский перевод Диофанта был сделан в IX столетии. Первый перевод на латинский был сделан Ксиландером и напечатан в 1575 г. в Базеле. В 1585 г. Симен Стевин, бельгийский математик, о котором мы будем говорить позже, издал французскую переработку первых четырех книг Диофанта. В 1621 г. появилось знаменитое в истории так называемого Анализа Диофанта издание греческого текста и

*) *Tannery*. Sur la perte des sept livres de Diophante (Mem Scient. vol II)

Loria. Le scienze esatte nell'antica Grecia. Modena. 1902.

латинского перевода Баше де-Мезириака с комментариями и дополнениями ученого издателя; на полях этой книги и писал Фермат свои „Observationes". После его смерти его сын С. Фермат издал в 1670 г. в Тулузе Диофанта с комментариями Баше и с „Observationes" Фермата. *)

Подъ редакциею Поля Таннери напечатано в Лейпциге в 1893 г. в двух томах издание: Diophanti Alexandrini Opera omnia.

Для облегчения чтения Диофанта Шульц в 1810 и Вертгейм в 1890 издали арифметику на немецком языке. К этому последнему изданию мы и отсылаем желающих ближе познакомиться непосредственно с Диофантом. Как лучшия пособия при его изучении можно рекомендовать: 1) Nesselmann. Die Algebra der Griechen. Berlin. 1842. Почти половина этой прекрасной книги посвящена Диофанту. 2) Loria Le scenze esatte nell'antica Grecia. Modena 1902. 3) Heath. Diophantos of Alexandria, Cambridge. 1885 и 4 статьи Таннери в собрании его Memoires scientifiques publiés par Heiberg et Zeuthen. 1912.

Арифметика Диофанта имеет одинаково большое значение и для истории алгебры и для истории теоретической арифметики; 11 положений, которыя предпосланы всему сочинению, суть бесспорно один из самых замечательных документов истории математики. Определивши, подобно Фалесу, число как собрание единиц и указавши на беспредельность ряда чисел, Диофант выделяет из них пять классов: квадраты, кубы, биквадраты, квадратокубы, кубокубы. Вместе с единицею и первою степенью числа эти пять видов чисел составляют „лестницу семи ступеней", которая встречается в некоторых сочинениях Пифагорейской школы. Этим классам целых

*) Экземпляр этого издания находится в библиотеке Академии Наук, в Петрограде.

чисел соответствуют классы дробей с числителем единицею: дроби будут называться простые, квадратные, кубические, биквадратные, квадратокубические и кубокубические соответственно знаменателю. Показавши обозначения тринадцати категорий чисел Диофант в положениях 4 и 8 дает правила их перемножения т.-е., говоря языком современной алгебры, законы умножения положительных и отрицательных степеней:

1. $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$, $x^m \cdot \frac{1}{x^m} = 1$, $x^m : x^n = x^{m-n}$, $\frac{1}{x^m} \cdot \frac{1}{x^n} = \frac{1}{x^{m+n}}$

и наконец $\frac{1}{x^m} : x^n = \frac{1}{x^{m+n}}$ (если $n > m$) и $\frac{1}{x^m} : x^n = \frac{1}{x^{m-n}}$ (если $n < m$), но ограничиваясь только значениями m и n сумма которых меньше 6. Положение 9-ое (правило умножения отрицательных чисел на отрицательные и положительные) формулируется Диофантом следующими словами: „Число вычитаемое будучи умножено на вычитаемое дает прибавляемое; вычитаемое умноженное на прибавляемое, дает вычитаемое". В положении 10-м Диофант настаивает на необходимости настойчивого упражнения в сложении, вычитании и умножении как одночленов так и многочленов. Наконец в 11-м положении Диофант дает указания, как путем прибавления и вычитания равных членов привести уравнение к возможно более простому виду. Развитие этих указаний вероятно и привело арабских математиков к двум основным операциям (алгебра и альмукабала. См. дальше главу VI). В том же введении Диофант вместе с правилами действий вводит символы для обозначения рассматриваемых им степеней и дробей и если у него отсутствует знак для обозначения действия сложения и два складываемых числа ставятся рядом одно подле другого, то для вычитания и для равенства Диофант вводит особые знаки и таким образом и в этом отношении является

одним из основоположников алгебры. За введением в шести сохранившихся для нас книгах следует собрание 208 задач, из которых значительно большая часть (160) относятся к решению неопределенных уравнений в рациональных числах. Задачи приводящиеся к решению определенных уравнений первой и второй степени встречаются главным образом в 1-ой книге. Но вообще Диофант, как он дошел до нас, не представляет стройной системы, в которой более легкие задачи предшествуют более трудным; можно думать, что тот беспорядок, в котором расположены задачи, есть дело рук неудачных переписчиков. Благодаря трудам Нессельмана, Таннери и Лориа можно однако разобраться в задачах Диофанта. В особенности полезна таблица, данная Лориа, в которой все задачи сгруппированы по 8 отделам. Я считаю полезным привести в виде примера несколько задач каждого отдела. (Номера задач указаны мною по книге Вертгейма более доступной для русского читателя).

I. Уравнения первой степени с одною неизвестною.

Пример: задача I, 10. Даны два числа. Нужно одно и то же число прибавить к меньшему и вычесть из большого; отношение суммы к разности дано. Задача приводит к уравнению $\frac{x+a}{b-x} = \lambda$, где a, b, λ суть данные числа. Заметим, что Диофант обыкновенно дает в своих задачах определенные числа; так в этой задаче $a = 20$, $b = 100$, $\lambda = 4$; но это видимое сужение очевидно нисколько не нарушает общности метода решения.

II. Определенные системы уравнений первой степени.

I, 1. Данное число разделить на два числа, разность между которыми дана ($x + y = a$, $x - y = b$). Приведем перевод решения этой задачи, вводя вместо символов Диофанта для равенства и вычи-

тания равно как и для обозначения неизвестной обычные символы современной алгебры и употребляя символ сложения, который, как было сказано выше, отсутствовал у Диофанта. „Пусть данное число есть 100, разность 40. Обозначим меньшее число x, большее число будет $x + 40$, оба вместе дадут $2x + 40$. Так как их сумма должна быть 100, то $2x + 40 = 100$. Если мы вычтем равное из равного, а именно 40 из $2x + 40$ и из 100, то останется $2x = 60$ и следовательно $x = 30$. Таким образом искомые числа будут 30 и 70".

I, 12. Разделить данное число на два числа двумя способами так, чтобы первое слагаемое первого разложения находилось бы в данном отношении к первому слагаемому второго разложения и чтобы второе слагаемое первого разложения находилось бы также в данном отношении к второму.

$(x_1 + x_2 = a,\ y_1 + y_2 = a,\ x_1 = \lambda_1 y_1,\ x_2 = \lambda_2 y_2)$.

I, 20. Найти четыре числа так, чтобы сумма трех из них была больше четвертого на данное число.

$(-x + y + z + u = a,\ x - y + z + u = b,\ x + y - z + u = c,\ x + y + z - u = d)$.

I, 23. Найти три числа так, чтобы наибольшее превосходило наименьшее на данную часть среднего, чтобы среднее превосходило меньшее на данную часть наибольшего и чтобы наименьшее число превосходило данное число на данную часть среднего числа.

$$\left(x - y = \frac{z}{p},\ y - z = \frac{x}{q},\ z - a = \frac{y}{r}\right).$$

Диофант решает задачу, полагая $p = q = r = 3$ и $a = 10$ и находит числа 45, $37\frac{1}{2}$ и $22\frac{1}{2}$.

III. Определенные системы уравнений, приводящихся к первой и второй степени.

I, 34. Найти два числа, находящиеся в данном

отношении, для которых сумма квадратов находится в данном отношении к сумме чисел $\left(\frac{x}{y}=\mu,\ \frac{x^2+y^2}{x+y}=\nu\right)$.

В решении Диофант предполагает $\nu=5$, $\mu=3$ и находит легко $x=6$, $y=2$.

IV, 16. Найти три числа, если даны произведения суммы двух чисел на третье: $(y+z)x=a$, $(z+x)y=b$, $(x+y)z=c$).

Полагая $a=35$, $b=27$, $c=32$ Диофант находит числа 3, 4, 5.

IV, 38. Найти три числа так, чтобы произведение двух из них, увеличенное на сумму этих чисел, было бы равно данному числу.
$(xy+(x+y)=a$, $yz+(y+z)=b$, $xz+(x+z)=c)$.

Диофант предполагает, что $a=8$, $b=15$, $c=24$ и находит рациональные числа $\frac{165}{60}, \frac{84}{60}, \frac{340}{68}$. Числа 8, 15, 24, увеличенные на 1 суть полные квадраты. Диофант, отыскивая рациональные решения, прибавляет условие, что числа a, b, c должны всегда по прибавлении единицы быть полным квадратом. Но общее решение уравнений есть

$x=-1+\sqrt{\frac{(a+1)(c+1)}{b+1}}$, $y=-1+\sqrt{\frac{(a+1)(b+1)}{c+1}}$,

$z=-1+\sqrt{\frac{(a+1)(c+1)}{b+1}}$ и для рациональности чисел x, y, z достаточно только, чтоб $(a+1)(b+1)(c+1)$ было полным квадратом.

VI. Неравенства с одною неизвестною.

IV, 25. Найти x так, чтобы $x<\frac{8}{x(x+1)}<x+1$

IV, 31. Найти x так, чтобы $\frac{b}{a+1}<x^2<\frac{b+1}{a}$

V. Неопределенные уравнения 1-ой степени.

I, 14. Найти два числа так, чтобы их произведение находилось в данном отношении к их сумме ($xy = \lambda\ (x + y)$).

I, 25. Найти три числа, которые становятся равны, если каждое отдает следующему определенную часть своего значения $\left(x = y + \frac{2x}{m},\quad y = z + \frac{2y}{n},\right.$ $\left. z = x + \frac{2z}{p}\right)$.

VI. Неопределенные уравнения 2-й степени.

II, 8. Разложить данное квадратное число на два квадрата: $x^2 + y^2 = a^2$

Диофант берет квадратное число: 16 и получает равенство $16 = \left(\frac{16}{5}\right)^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2$.

Эта задача, общее которой решение $x = \frac{2am}{m^2+1}$, $y = \frac{a(m^2-1)}{m^2+1}$ было известно грекам, замечательна и потому, что к ней Фермат сделал свое знаменитое добавление, по которому никакая степень, кроме квадрата, не может быть разложена на сумму двух степеней с тем же показателем.

II, 23. 24. Найти два числа так, чтобы квадрат каждого из них, увеличенный (зад. 23) или уменьшенный (зад. 24) на сумму двух чисел, оставался полным квадратом: ($x^2 \pm (x + y) = u^2$, $y^2 \pm (x + y) = v^2$).

III, 16. Найти три числа так, чтобы произведение двух из них, увеличенное квадратом третьего, было бы полным квадратом.

($yz + x^2 = u^2$, $zx + y^2 = v^2$, $xy + z^2 = w^2$).

Диофант полагает первое число равным единице, а третье равным учетверенному второму, увеличенному на 4; тогда, говорил он, два из условий удо-

влетворены и остается удовлетворить третьему. Задача приводит к уравнению: $16x^2 + 33x + 16 = (4x - 5)^2$, откуда второе число равно $\frac{9}{73}$, а третье $\frac{328}{73}$.

Формулы для решения этой задачи, хотя и не исчерпывающия все решения, даны Эйлером. (Comment. Collectae II. p. 576).

IV, 33. Разделить число 1 на два числа так, чтобы, прибавляя к каждому из них данное число и перемножая таким образом полученныя числа, получилось произведение, равное полному квадрату ($x + y = 1$, $(x + a)(y + b) = u^2$). Диофант полагает $a = 3$, $b = 5$ и приводит задачу к решению уравнения $72x^2 + 81 =$ полному квадрату.

IV, 45. Найти три числа так, чтобы разность между наибольшим и средним находилась в данном отношении к разности между средним и наименьшим и чтобы в то же время сумма каждых двух чисел была полным квадратом:

$$\frac{x - y}{y - z} = \lambda,\ y + z = u^2,\ z + x = v^2,\ x^2 + y^2 = w^2.$$

Диофант ведет свое исследование, положив $\lambda = 3$ и $u = 2$.

V, 1. 2. Найти три числа, составляющие геометрическую пропорцию так, чтобы каждое из них, увеличенное (зад. 2) или уменьшенное (зад. 1) на данное число, давало бы полный квадрат.

$(xz = y^2,\ x \mp a = u^2,\ y \mp a = v^2,\ z \mp a = w^2)$.

V, 3. 4. Найти три числа так, чтобы увеличивая или уменьшая как число так и произведение двух чисел на данное число, получался полный квадрат:

$$x \pm a = u^2,\ y \pm a = v^2,\ z \pm a = w^2$$
$$yz \pm a = u_1^2,\ xz \pm a = v_1^2,\ xy \pm a = w_1^2.$$

V, 30. 31. Найти три квадратные числа так, чтобы сумма двух из них, увеличенная или уменьшенная на данное число, давала бы полный квадрат.

$(y^2 + z^2 + a = u^2,\ z^2 + x^2 \pm a = v^2,\ x^2 + y^2 + a = w^2)$.

IV, 6. К кубу и к квадрату прибавить один и тот же квадрат так, чтобы квадрат остался квадратом а куб—кубом ($y^3 + x^2 = u^3$, $z^2 + x^2 = v^2$).

IV, 7. К кубу и к квадрату прибавить один и тот же квадрат так чтобы, куб сделался квадратом, а квадрат кубом ($y^3 + x^2 = u^2$, $z^2 + x^2 = v^3$).

IV, 29. Найти два числа так чтобы их произведение делалось кубом как по прибавлении, так и по вычитании их суммы: $(xy + (x + y) = u^3$, $xy - (x + y) = v^3$).

V, 32. Найти три квадрата так, чтобы сумма их квадратов была также квадратом ($x^4 + y^4 + z^4 = u^2$). Диофант решает задачу положивши, что $y^2 = 4$, $z^2 = 9$ и следовательно $x^4 + 97 = u^2$.

Задачи восьмого отдела, посвященного вопросу о построении рациональных прямоугольных треугольников, т.-е. о нахождении трех рациональных чисел x, y, z удовлетворяющих уравнению $x^2 + y^2 = z^2$ и сверх того дополнительным заданиям, находятся исключительно в 6-й книге и составляют ея содержание. Вот некоторые из задач этого типа.

IV, 19. Найти прямоугольный треугольник, в котором сумма площади и гипотенузы есть квадрат, а периметр — куб: $\left(\frac{xy}{2} + z = u^2,\ x + y + z = v^3.\right)$

Решение, данное Диофантом, основывается на свойстве квадрата 5 обращаться в куб после сложения с числом 2. По этому поводу Фермат замечает, что он имеет неопровержимое доказательство, что из всех целых чисел только 5 имеет это свойство и прибавляет: способ Баше дает безчисленное множество дробей имеющих это свойство, но ни Баше, на какой-либо другой писатель мне известный, не занимались учением о целых числах, необыкновенно прекрасным и трудным. Утверждение

Фермата о том, что уравнение $x^2 + 2 = y^3$ имеет единственное решение $x = 5$, $y = 3$ доказано Эйлером в его Алгебре.

VI, 24. Найти прямоугольный треугольник, в котором периметр есть куб, а сумма периметра и площади — квадрат: $(x + y + z = u^3, \frac{xy}{2} + (x + y + z) = v^2)$.

Таковы задачи, которые решаются в Арифметике. Что касается до решений, то прежде всего обратим внимание на то, что Диофант ставит себе целью найти рациональные решения и что поэтому название „анализ Диофанта", применяемое теперь к решению неопределенных уравнений в целых числах, не точно. Притом решения Диофанта суть положительные числа. Отрицательные решения, равно как и иррациональные не существуют и поэтому Диофант прибавляет к задачам часто добавочные условия, гарантирующие рациональные положительные решения. Другой недостаток Диофанта с современной точки зрения заключается в том, что он не интересуется числом решений; найдя одно решение, он считает задачу решенною. Но эти недостатки Арифметики компенсируются богатством и разнообразием методов решения, тою виртуозностью и остроумием, которые он проявляет в искании наиболее подходящих к каждой задаче методов. При всем разнообразии методов можно однако выделить некоторые наиболее общие и чаще других применяемые.

Так изучение решения весьма многих задач приводит к следующей общей идее этих решений. Объясним ее в применении к неопределенным уравнениям 2-ой степени. Эти уравнения всегда представляются у Диофанта в форме:

(1) $Ax^2 + Bx + C = y^2$, при чем требуется, как мы знаем, найти для x и y рациональные значе-

ния. Очевидно, что если нам удастся выразить x и y двумя рациональными функциями от новых неизвестных t и u так, что одна из этих неизвестных, например t, будет рациональною функциею от другой, то задача решена, ибо тогда всякая дробь, взятая вместо u дает для t также рациональное число, а потому и x и y получают рациональные значения. Но подстановка вместо x и y рациональных функций от t и u в уравнение (1) обращает его в уравнение $F(t, u)=0$, которое должно быть первой степени относительно t для того, чтобы t выражалось рационально посредством u. Диофант и достигает этого двумя различными способами.

1) Пусть a и b будут два рациональные числа тожественно удовлетворяющие уравненно (1); полагая

$$x = a + t, \quad y = b + tu,$$

приводим уравнение к желательному виду т. к. в силу тожества $Aa^2 + Ba + C = b^2$ уравнение (1) по сокращении на t будет относительно t первой степени. В тех случаях, когда частное решение есть $x = 0, y = b$, искомая подстановка будет очевидно $x = t, y = tu + b$ и следовательно в результате ея t т. е. x выражается рационально посредством u.

Для упрощения можно прямо положить $y = ux + b$ и задача будет решена. Так, например, поступает Диофант при решении задачи IV, 33. (см. выше). Неопределенное уравнение $72x^2 + 9^2 = y^2$ очевидно имеет частное решение $x = 0, y = \pm 9$ и поэтому подстановка $y = ux + 9$ решает вопрос. Диофант полагает $u=8$ и получает уравнение $72x^2 + 81 = 64x^2 + 144x + 81$, которое приводится к уравнению первой степени $8x = 144$ и дает $x = 18$. Таким же образом все уравнения как типа $Ax^2 + c^2 = y^2$ так и более общие $Ax^2 + Bx + c^2 = y^2$ решаются полагая $y = ux \pm c$.

Так например задача, II, 17.: „найти два числа, находящиеся в данном отношении и обращающиеся

по прибавлении данного квадрата в квадрат", приводится если отношение есть 3, а прибавляемый квадрат есть 9, к неопределенному уравнению $3x^2 + 18x + 9 = y^2$. Диофант решает его полагая $y = 2x - 3$, т.-е. принимая $u = 2$. В 4-ой книге 9-ая задача сводится к задаче: найти два числа, отличающиеся на 1 так, чтобы разность их кубов была квадратом, т. е. к неопределенному уравнению: $3x^2 + 3x + 1 = y^2$, которое решается полагая $y = 1 - 2x$ т. е. полагая $u = -2$. Задача IV, 45 (см. выше) приводит к неопределенному уравнению $3x^2 + 12x + 9 = x^2$, которое решается тем же приемом.

2) способ применяется Диофантом в том случае, если легко находится решение уравнения $Ax^2 = y^2$ т. е. уравнения, получающегося сохраняя в уравнении. (1) $Ax^2 + Bx + C = y^2$ только члены высшей степени. Пусть например $Aa^2 = b^2$, тогда полагая $x = at$, $y = bt + u$ приводим уравнение (1) к виду:

$Bat - 2btu - u^2 + C = 0$, откуда $t = \frac{C - u^2}{2bu - Ba}$ и всякое рациональное значение u дает рациональные значения x и y. По этому способу решаются уравнения типа:

$m^2x^2 + C = y^2$ и более общие уравнения типа $m^2x^2 + Bx + C = y^2$.

Так как и в том и в другом случае $x = 1$, $y = m$, удовлетворяет уравнение $m^2x^2 = y^2$, то подстановка $y = mx + u$ решает задачу. Так например задача II, 29: „найти два квадрата так, чтобы их произведение по прибавлении того или другого числа оставалось квадратом":
($x^2y^2 + x^2 = u^2, x^2y^2 + y^2 = V^2$), в которой Диофант принимает $y = 1$ и поэтому прежде всего ищет квадрат, который оставался бы квадратом по прибавлении 1, приводится к решению уравнения $x^2 + 1 = y^2$. Подстановка $y = x + u$ решает вопрос:

$x = \frac{1-u^2}{2u}$. Диофант, как всегда, принимает $u = -2u$ получает $x = \frac{3}{4}$. В той же задаче встречается уравнение $9x^2 + 9 = y^2$, решаемое полагая $y = 3x - 4$.

Задача IV, 17. Найти три числа, которых сумма есть квадрат так, чтобы квадрат каждого по прибавлении следующего числа оставался квадратом: ($x + y + z = t^2$, $x^2 + y = u^2$, $y^2 + z = v^2$, $z^2 + x = w^2$) приводит к уравнению $10816x^2 + 221 = y^2$, которое решается, полагая $y = 104x + 1$.

Задачи V, 3. 4 (см. выше) приводятся к уравнениям: $4x^2 + 28x + 34 = y^2$ и $4x^2 + 4x + 19 = y^2$.

Так как то и другое уравнение по отбрасыванию членов степени ниже второй обращается в $4x^2 = y^2$, которое удовлетворяется, полагая $x = 1, y = 2$, то оба уравнения решаются постановкою $y = 2x - u$. Диофант не ограничивается уравнениями $Ax^2 + Bx + C = y^2$. Мы уже указали, что многие из его задач приводят к неопределенным уравнениям третьей и четвертой степени (общее число таких задач равняется 31). Так например задача IV, 29 приводит к уравнению: (1) $9x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 12x + 1 = y^2$. Полагая $y = 3x^2 - 6x + 1$, Диофант получает уравнение, в котором отсутствуют члены с x^4, x и свободный член,—а именно уравнение $32x^3 = 36x^2$, что дает $x = \frac{8}{9}$. Нессельман *)указал,что уравнение(1) есть частный случай уравнения типа $a^2x^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + e^2 = y$, которое может быть всегда приведено к виду $Lx^3 = Mx^2$ подстановкою $y = ax^2 + ux + e$ т. е. преобразованием $x = t$. $y = at^2 + ut + e$. В задаче V, 32. (см. выше) Диофант решает уравнение $x^4 + 97 = y^2$, полагая $y = x^2 - 10$, т. е. вводит снова квадратичное преобразование.

*) Algebra der Griechen 345.

Таким образом внимательное изучение методов Диофанта приводит нас к началу не только теории линейных преобразований ($x = at,\ y = bt + u$), но и теории преобразований более общих ($x = t,\ y = tu + b$; $x = t,\ y = at^2 + ut + e$). Как мы увидим теория линейных преобразований двух переменных в общей форме $x = \alpha t + \beta u$, и $y = \gamma t + \delta u$, при целых коэффициентах $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, удовлетворяющих равенству $\alpha\delta - \beta\varphi = 1$ решает общий вопрос о неопределенных уравнениях 2-ой степени и в соответствующих преобразованиях Диофанта мы имеем начало теории бинарных квадратичных форм.

Его квадратичные преобразования представляют начало другой еще более общей теории—теории преобразования уравнения:
$F(x, y) = 0$ в уравнение $\Phi\ (t, u) = 0$ подстановками:

$$x = \eta(t, u)$$
$$y = \psi(t, u),$$

при чем η и ψ суть рациональные функции.

В задачах Диофанта уравнение $F\ (x, y) = 0$ есть уравнение с рациональными коэффициентами и в подстановках коэффициенты суть также рациональные числа. Поэтому если, как в выше приведенных примерах, можно найти рациональные подстановки, приводящие уравнение $F(x, y) = 0$ к уравнению $\psi(t, u) = 0$ первой степени относительно t, то x и y выражаются рационально посредством u, и всякое рациональное значение u дает для x и y рациональные числа т. е. достигается цель, которую имеет в виду Диофант. Но не трудно видеть, что ограничение коэффициентов как уравнения, так и преобразований рациональными числами может быть отброшено, коэффициенты могут быть какие угодно числа и тогда мы получаем исследования, имеющие громадное значение как в теории алгебраических функций и их интегралов, созданной

Риманном и Вейерштрассом, так и в теории кривых высших степеней.

При рациональных преобразованиях не меняется *род* кривой (выражение $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - r$, где n есть степень уравнения, d и r означают числа двойных точек и возврата кривой). Преобразования, дающие возможность выразить x и y рациональными функциями одного параметра и возможны только для уникурсальных кривых ($p = 0$). Простейшая из этих кривых есть круг, уравнение которого $x^2 + y^2 = a^2$. Применяя к задаче II, 8. разложить данный квадрат на два квадрата, т. е. к уравнению $x^2 + y^2 = a^2$ преобразование Диофанта: $x = t$, $y = ut + a$ находим:

1) $x = \frac{2au}{1+u^2}$, $y = \frac{a(u^2-1)}{1+u^2}$ и, придавая u произвольное рациональное значение, получаем бесконечное множество решений задачи Диофанта. Но те-же уравнения:

1) дают и параметрические уравнения уникурсальной кривой круга. (Полагая $u = \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2}$, получаем $x = a \operatorname{Cos} \alpha$, $y = a \operatorname{Sin} \alpha$), т. е. частный случай униформизации посредством трансцедентной функции, задачи, которая была в общем виде поставлена и решена Пуанкаре с помощью фуксовых функций. Так связывается начало алгебры и теории чисел, заложенное в великом сочинении Диофанта с наиболее глубокими математическими исследованиями настоящего.

Вместе с тем читатель может уже представить себе разнообразие и интерес методов Диофанта, и наша цель будет достигнута, если примеры и указания нами данные побудят его ближе познакомиться с сочинением, которое Лориа называет „opera bellissima fra le belle che l'antica Grecia ci ha

regalate". К сожалению бедность русской переводной математической литературы лишает возможности познакомиться с Диофантом, не прибегая к иностранным изданиям.

Два вопроса невольно возникают после знакомства с таким эпоходелающим сочинением, как арифметика Диофанта. Кто мог быть предшественником его в этих трудных и новых областях математики или его арифметика есть proees sine matre creata? Оставил ли он послѣ себя школу учеников и комментаторов?

И тот и другой вопрос не получили до сих пор удовлетворительного решения. Особенно первый вопрос является спорным. Итальянский математик XVI столетия Бомбелли, приписав Диофанту схолии комментатора XIV столетия Максима Плануды, считал Диофанта учеником индусов. Позднейшие историки склонны считать Диофанта талантливым математиком, из работ своих предшественников составившим органическое целое, дополненное собственными исследованиями.

По отношению к первым двум книгам Диофанта, трактующим об рѣшении опредѣленных уравнений 1 и 2 степ., это мнение можно считать доказанным. Решение квадратных уравнений в геометрической форме было известно уже Евклиду.

Так называемая „Греческая Антология" содержит 48 задач в стихах (арифметические эпиграммы), которые относятся к решению систем определенных уравнений с нѣсколькими неизвестными (задача о бассейне, задача о короне Герона, рѣшенная Архимедом, задача о возрасте Диофанта). Но до нас дошла только одна единственная задача, приводящаяся к решению неопределенного уравнения 2-й степени, „Задача о быках Солнца".

В 1773 г. Лессинг нашел в одной немецкой библиотеке греческую эпиграмму в 44 стихах, заклю-

чающую задачу неопределенного анализа, которая, по словам рукописи, была предложена Архимедом в послании к Эратосфену александрийским геометрам. Задача требует вычислить число быков (отсюда ее название—задача о быках) и коров Солнца, принадлежащих к четырем стадам различных мастей. Обозначим буквами λ, ν, ξ, μ — число быков белой, черной, рыжей и пестрой масти и буквами λ', ν', ξ', μ' — число коров тех же мастей. Эти числа должны прежде всего удовлетворить следующим семи уравнениям:

1) $\lambda = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\nu + \xi$,

2) $\nu = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)\mu + \xi$,

3) $\mu = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)\lambda + \xi$,

4) $\lambda' = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)(\nu + \nu')$,

5) $\nu' = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)(\mu + \mu')$,

6) $\mu' = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)(\xi + \xi')$,

7) $\xi' = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)(\lambda + \lambda')$.

Решение этой системы уравнений не представляет особенной трудности: оно приводит к выражению восьми неизвестных кратными одной и той же неопределенного числа x с коэффициентами, имеющими от восьми до десяти цифр. Но рукопись добавляет еще два условия:

8) $\lambda + \nu$ должно быть квадратом.

9) $\mu\nu + \xi$ должно быть треугольным числом.

И тогда решение задачи зависит от решения Пеллевского уравнения, решение которого требует длиннейших вычислений.

Задача о быках и вопрос о том, может ли она

быть приписана Архимеду, занимал многих немецких ученых, в том числе Клюгеля, Нессельмана *) и Гейберга. Ею интересовался, повидимому, и Гаусс. Последнее, повидимому, исчерпывающее изучение задачи было произведено филологом Крумбигилем и математиком Амтором **). По Амтору задача сводится к решению уравнения Пелля

$$t^2 - 2.3.7.11.29.353\ u^2 = 1$$

при условии, что u есть краткое число 2.4657.

В числе быков Солнца должно быть 206545 цифр. Так как на странице таблицы логарифмов Каллета помещается только 2500 цифр, то, чтобы напечатать все 9 чисел, необходим том в 744 страницы.

К какому времени относится эта задача?

Можно ли приписать ее великому сиракузскому геометру, Псаммит которого имел целью показать, что самые громадные числа могут быть превзойдены теми числами, которые он учит классифицировать? Число быков солнца далеко еще от предела первого периода Псаммита, т.-е. числа

$$10^{800\,000\,000}.$$

Нессельман, основываясь на том, что треугольные числа встречаются впервые у Никомаха, считал условия (8) и (9) припискою позднего времени и категорически отрицал принадлежность задачи Архимеду. Таннери и Лориа склонны, повидимому допустить последнее.

Спорным остается таким образом вопрос о предшественниках Диофанта в греческой математике. Нельзя считать также окончательно решенным в отрицательную сторону вопрос о влиянии Индии, в которой громадные числа привлекали издавна внимание мыслителей, на греческую мысль. Мы

---

*) Algebra der Griechen. S. 481 и след.

**) Zeitschrift für Mathematik und Physik. Historisch-literarische Abtheilunz t. XXV. 1880.

возвратимся к этому вопросу в следующей главе, посвященной индийской математике, и перейдем теперь к вопросу о влиянии Диофанта на развитие математики в ближайшее к нему время. И в этом вопросе для решения мы имеем мало данных. Жил ли Диофант в 3-м или 4-м столетии, во всяком случае блестящее время греческой мысли и ее александрийского периода подходило к концу. Надвигалось средневековье с его пренебрежительным отношением к научному знанию. „Credo quia absurdum" становилось лозунгом для мыслителей. И поистине поразительным является тот факт, что талантливая язычница, перед чарующею личностью которой склонялись даже христианские епископы, растерзанная фанатическою толпою египетских монахов на улицах Александрии в 415 г., была почти единственным известным нам комментатором Диофанта *).

V.

Индусы.

Вопрос о древности и степени самостоятельности индийской цивилизации представляется до сих пор столь же спорным, как и аналогичный вопрос для

*) До нас дошло, к сожалению, мало сведений об этой замечательной женщине. Лучшие научные исследования о ней принадлежат Hoche (Philologus T. XV. 1860. 435—474) и Bigone (Ipazia Alessandrina, studio storico) (Atti del R. Ist. Veneto. VI. Serie t. V. 1887). Личность Гипатии со времени английского рационалиста Толанда привлекала к себе внимание свободных мыслителей Европы. Прекрасный роман английского социалиста Кингслея (переведен на русском языке) способствовал распространению славы ее имени, но многое еще нужно сделать и это лежит на обязанности женщин-математиков Европы и Америки. Почин к этому предполагалось положить в 1915 г., когда прошло 15 столетий после трагической кончины Гипатии, но великая война помешала этому.

Китая. Сочинения богословско-геометрического характера — Сульвасутры (правила для постройки алтарей божествам), которые санскритологами относятся к 8-му веку до Р. Х. заставляют думать, что теорема Пифагора была уже в это время известна индийским жрецам. Основываясь на этом, многие ученые считают несомненным влияние Индии на Пифагора, указывая и на другие черты сходства между учением Пифагора и учением браминов (метемпсихоз, запрещение употребления в пищу бобов *). К еще более раннему периоду относится тот интерес к громадным числам, который составляет одну из характерных черт индийской литературы различных периодов и приводит к мысли об индийском влиянии на Псаммит Архимеда. Если в Риг-Веде (1200—1100 до Р. Х.) наибольшее встречающееся число есть 100.000, то в более поздних произведениях индийской письменности мы встречаем особые имена для громадных чисел до 10 биллионов (Ягур-веда) или до 10^{17} (Магабгарата). Существуют особые имена и для дробей с числителем 1 и с знаменателями весьма большими (например, 15^{1} 30). В одной из легенд о Будде говорится о том, что он знал названия чисел до 10^{54}.

Если влияние индийской науки и философии на греческую мысль 6—3 столетий является еще не вполне доказанным, то почти несомненною представляется возможность культурного взаимодействия Индии и Греции в следующий затем период. После похода Александра Македонского в Индию греко-бактрийское государство служило проводником этого взаимодействия. Войска царя Канишки бились за Марка Антония против Юлия Цезаря под Акциумом, индийские посольства являлись в дворцах Августа'

*) В особенности Schroeder. Pythagoras und die Indier. Leipzig, 1884.

Трояна, Юлиана. Сношения Индии с Западом могли иметь влияние и на науку в Индии и на александрийскую научную школу. Спорным является вопрос о древности арифметической рукописи, найденной в 1881 г. в северо-западной Индии (Бакшали) и относимой одними к началу нашей эры, другими к 3-му или 4-му столетию после Р. Х. В рукописи помещено несколько задач типа задач „арифметики" Диофанта, например задача—найти число, которое и при сложении с 5, и при вычете из него 11, давало бы полный квадрат. От того или другого определения, с одной стороны древности этого манускрипта, с другой стороны времени жизни Диофанта, зависит решение вопроса, арифметика ли Диофанта, проникшая в Индию, послужила толчком к таким задачам или же Александриец Диофант был приведен к своим замечательным исследованиям дошедшими до него индийскими задачами. К этому последнему решению склонялся Ганкель в его вдумчивых исторических очерках *), в то время как Кантор, настаивая на самостоятельности развития арифметических и алгебраических понятий от Евклида и Архимеда, неопифагорейцев и Диофанта, держится первого взгляда.

Сомнительность вопросов, касающихся хронологии как политической, так и культурной истории Индостана, отсутствие точных сведений о сношениях Индии с западом, оставляет нерешенными многие интересные вопросы, касающиеся математики в Индии до 5-го столетия после Р. Х. Бо́льшие сведения имеем мы о позднейшем периоде. До нас дошли сочинения трех математиков—астрономов Индии: Ариабхатта (род. 476 после Р. Х.) оставил сочинение Ариабхаттиам, которого третий отдел посвящен матема-

*) Hankel. Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter Leipz. 1874 S 204.

тике*). Брамагупта **) (род. 598) написал книгу „Усовершенствованная системы Брамы: „Brâhma—sphuta—siddhanta", в котором две главы относятся к математике; и наконец ученому 12-го столетия Бхаскар-Ачарии (род. 1114) принадлежит сочинение „Венец системы", Siddhacitanromani, две главы которого, весьма важные для истории математики, носят заглавия Лилавати (прекрасная) и Вияганита (исчисление корней). Одну из особенностей индийских математических сочинений составляет их стиль, резко отличающийся от строгого стиля Евклида или Архимеда. Лилавати—Бхаскары начинается словами: „Радость и счастие в этом мире ожидает тех, кто воспримет „Прекрасную"; члены ее украшены чудным отношением вещей, их разнообразием и делением; точны и полны ее решения и изящен ее язык". Такому поэтическому отношению к науке соответствует и поэтическая форма, в которой излагались задачи. Приведем два примера: „Корень квадратный из половины пчелиного роя вылетел из куста жасмина, восемь девятых всего роя осталось в улье; самка летает около самца, привлеченного ночным благоуханием цвета лотоса. Спрашивается, сколь пчел в рое"? или „среди сражения яростный Арьюна схватил стрелы, чтобы убить Карну. Половина стрел пошла на собственную защиту, учетверенный квадратный корень попало в лошадей, 6 стрел попало в возницу, три расщепили солнечный зонт и знамя и наконец последняя—последняя пронзила голову Карны. Спрашивается, сколько стрел было у Арьюны?" Наконец еще один пример,

*) Французский перевод сделан Rodet и помещен в Journal Asiatique за 1879 Série 7, t. XIII).

**) Математические главы Брамагупты и Бхаскары - Агарии переведены и изданы на английском языке Колебруком: Algebra with Arithmetic and mensuration from the Sanscrit of Brahmegupta and Bhascara. London, 1817.

напоминающий современную тенденцию пользоваться математикою для проведения здравых социальных понятий и знаний в политической экономии: „Если шестнадцатилетняя рабыня стоила 32 нишки, сколько стоит двадцатилетняя".

Этому поэтическому стилю так резко отличающемуся от строго-логического, недопускающего никаких отступлений и внешних прикрас, стиля греческих классиков *) соответствует и иное отношение к точности и определенности основных математических понятий. Мы говорили выше, что греческие ученые, желая достигнуть наивозможно большей строгости и избегнуть всех возможных возражений со стороны софистов резко отделяли учение о числах от учения о величинах. Так Евклид дал в X книге „Начал" геометрическую форму теоремам учения об иррациональностях 2-ой степени или приводящихся к ним; так Диофант прилагал свои „Определения" т.-е. правила алгебраических операций исключительно к рациональным числам. Напротив индусские математики оперировали одинаково над рациональными числами и иррациональностями и знали например, что

$$\sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}.$$

Этим они уже пролагали путь к тому обобщению понятия о числе, которое составляет характеристическую черту новейшей математики. В другом вопросе они пошли также гораздо дальше Диофанта. В то время как Диофант отбрасывал все те решения своих задач, которые выражаются отрицательными числами, и дает вместо правила действия над отрицательными числами правило действия над разностями, индусские математики интерпретируют отрицательные числа, противополагая

*) Резкое исключение составляют задачи в стихах „греческой антологии".

долг (rina) имуществу (dhana). Уже у Ариабхатты мы находим задачу о курьерах и индусским математикам не чужда идея интерпретации положительных и отрицательных чисел движениями в двух противоположных направлениях.

Индусские математики пошли несколько дальше Диофанта и в решении уравнений. Хотя и у Диофанта мы имеем задачи, сводящиеся к уравнениям третьей степени, у Бхаскары Ачарии мы находим новые и весьма остроумные приемы решения уравнений высших степеней. Так уравнение

$$x^4 - 2(x^2 + 200x) = 9999$$

он решает прибавляя к обеим частям $4x^2 + 400x + 1$.

Из получающегося таким образом уравнения

$$(x^2 - 1)^2 = (2x + 100)^2$$

легко получается $x = 11$. Давши это решение, индусский математик прибавляет: „тут нужна была догадливость". Но еще важнее успехи индусов в теории целых чисел. Именно индусские математики первые стали искать целые решения неопределенных уравнений, в то время как решения, данные Диофантом, выражаются рациональными числами. Причина этого коренного различия легко объяснима: все три выдающиеся индийские математика были в то же время астрономами и даже прежде всего астрономами; математические главы занимают сравнительно небольшое место в их астрономических сочинениях, в которых напротив большое внимание уделено вопросам хронологии, календаря и важному для астрологических целей вопросу о периодах совпадения одинаковых относительных положений Солнца, Луны и планет. Во всех этих вопросах необходимо разыскание целых чисел. Из Индии несомненно ведет свое начало учение о Пасхалии, которое имело такое большое значение и которое сводится к решению задачи о нахождении целого числа, которое при делении на данные числа дало данные остатки.

Гаусс в своих Disquisitiones и Лобачевский в своей алгебре остановились на этом вопросе.

У индусских математиков мы находим поэтому впервые методъ решения уравнения $ax \pm by = c$ в целых числах, основаный на сведении его к уравнению с меньшими коеффициентами. Метод этот, который в Европе был повидимому самостоятельно найден в 1624 г. французским математиком Баше де Мезириаком, носил у индийцев название метода распыления, очевидно потому, что решение уравнения сводится на решение уравнений с уменьшающимися коеффициентами до тех пор, пока не получается уравнение с коеффициентом при одной из неизвестных, равными 1. Индийские математики с успехом занимались также решением неопределенных уравнений вида $ax^2 + b = cy^2$ и $xy = ax + by + c$. Для решения уравнений первого вида ими изобретена была особая метода, носящая название круговой или циклической, которая сводила решение уравнения $ax^2 + b = cy^2$ к решению уравнения того же вида, но с меньшими коеффициентами. Подстановки, которые при этом делаются, показывают знакомство с основаниями той теории, которая носит теперь название теории квадратичных вычетов; но доказательства теорем отсутствуют. Только Лагранж в своей первой работе по теории чисел дал вполне строгую теорию решения как уравнения $ax^2 + b = cy^2$ так и особенно важнаго уравнения $ax^2 + 1 = y^2$, решение которого имеет значение и для решения более общего уравнения.

Нельзя не пожалеть, что наши сведения об истории математических знаний в Индии очень скудны. Может быть нам остаются неизвестными многие достижения талантливой расы, о любви которой к числам и задачам мы имеем яркие доказательства и свидетельства. „Как Солнце своим блеском затемняет звезды, так мудрец превзойдет всех, если он

в народном собрании предложит задачи и искусно решит их", говорит один индийский писатель 7-го столетия.

Работы математиков Индии сделались известны математикам Европы только в конце первой четверти XIX столетия, когда они могли после работ Лагранжа и Гаусса представить только исторический интерес. Спорным, как мы говорили, является вопрос о взаимодействии индийской и греческой математики. Не подлежит напротив никакому сомнению, что индийская литература, индийская архитектура, индийская наука имели громадное влияние на арабов,—кочевой народ, который в 7 и 8 веках выступил на арену истории и сыграл большую роль в истории цивилизации. К арабам и к их роли в истории чисел мы теперь и переходим. Она и заключалась между прочим в синтезе индийской и греческой математики.

VI.

От Диофанта до Фермата.

Между началом V-го столетия, когда Гипатия комментировала в Александрии Диофанта и началом XVII-го столетия, когда французский юрист и гениальный математик Ферма писал в Тулузе, на полях издания Диофанта, свои знаменитые „Observationes" и посылал математикам Англии и Бельгии для доказательства теоремы арифметики, прошло двенадцать столетий и за все эти двенадцать столетий область математики, связанная с именами Диофанта и Фермата, не сделала почти никаких прямых успехов. Но для математики в ея целом только первые четыре столетия после разгрома научных центров греческой мысли Александрии и Афин являются периодом полного застоя. Начало восьмого столетия составляет эпоху в истории мате-

матики. Преемник фанатика магометанина Омара, довершившего в 640 г. после взятия Александрии дело уничтожения бесценных творений греческого гения, начатое фанатиками—христианскими монахами, халиф Альманзор (734—775) переносит свою столицу в Багдад и междуречье Тигра и Евфрата становится снова как за 20 веков перед тем центром культуры. При нем и его просвещенных преемниках халифах Гарун-Арращиде (786—809) и Альмамуне (813—833) в Багдаде и Басре идет интенсивная работа по собиранию греческих сочинений и их переводу на арабский язык. Позже на другом конце территории подпавшей под арабское политическое влияние в Испанской Кордове халифы Абд-Аррахман и Аль-Гакам собирают библиотеку в 600.000 томов, каталог которой в 44 тома облегчал пользование книгами. У западных арабов также как и у восточных шла работа переводов и усвоения греческих классиков. Главою математической западно-арабской школы повидимому является Альмадшрити, автор полуматематического, полумистического сочинения „О целе мудрости".

Арабские ученые Багдада и Кордовы не ограничились изучением и переводами греческих книг. Во многих областях знания как и в метафизике они пошли самостоятельным путем (как интересная философская школа „Мутакаллимун", утверждавшая, что время состоит из атомов) и пошли дальше своих учителей. В особенности развитие науки о решении определенных уравнений, которая и теперь носит арабское имя, многим обязана талантливому, но слишком короткое время послужившему человеческой цивилизации народу. „Al gebr w'al mukabala"—таково заглавие сочинения написанного по приказинию халифа Альмамуна в 820 г. Мохаммедом бен Муза al Hovarezmi (т.-е. родом из Ховарезма—современной Хивы). Оба выражения которыми Мо-

хаммед обозначает свое искусство решать задачи, относятся к двум простейшим операциям над уравнениями: „альгебр“(от слова gabar восстановлять,*) restaurare) означает „дополнение отрицания т.-е. перенос отрицательного члена уравнения в другую часть; „аль мукабала“ (сравнение, oppositio) обозначает соединение подобных членов обеих частей друг с другом.

Из уравнения $x^2 - 7x + 1 = 10x$ al gebr производит $x^2 + 1 = 7x + 10x$, а из последнего al mukabala делает $x^2 + 1 = 3x$.

Подобно термину *алгебра* и другой математический термин *алгорифм* находит свое объяснение в прозвище Мохаммеда Альховарезми. Латинский перевод его сочинения об искусстве счета начинался непонятными словами: „Dixit Algorittmi“, и поэтому самое искусство счета стали называть алгорифмом, лиц же, употреблявших арабские методы—алгорифмиками. Название Algorithmus или Algorismes носили многие сочинения по арифметике и алгебре XIII—XV столетия (Jordanus Nemorarius, Sacrobosto, Peurbach (1423—1461).

Уже в XIII столетии стали подыскивать самые разнообразные объяснения этого таинственного слова, то составляя его из греческих слов, то выдумывая мифические личности короля Альгора или философа Альгуса. Только в 1857 г. открытая в библиотеке Кембриджского Университета рукопись доказала неоспоримо, что Algorithmi есть испорченное „Альховарезми“.

Сочинения Мохаммеда, имеющие весьма большое значение для истории алгебры (отметим, например что наравне с операциями сложения, вычитания умножения и деления фигурируют как отдельные

*) Отсюда в Испании algebrista означало хирурга (Don Quixote Parte III. X. V).

операции удвоение и деление на два.—Рассматривание этих двух операций, как самостоятельных, (удержалось и в западной Европе до XV столетия), представляют мало интересного для учения о числе. Отметим только проверку правильности счета посредством числа 9 *).

Мухаммед Альховаризми открывает собою ряд замечательных арабских ученых, переводчиков и самостоятельных исследователей. Их переводы и исследования оказали впоследствии громадное влияние на развитие математической науки в западной Европе. Из них выделяются прежде всего Табит—Ибн—Курра (836—901), переводчик Евклида, Архимеда, Аполлония и Аб'уль Вафа, переводчик Диофанта. В сочинение Табита впервые появляется формула для составления дружественных чисел. Выше упомянутый математик и мистик Альмадирити советовал употреблять бумажки с числами 220 и 284 для привораживания любимой особы; одну должен проглотить привораживающий, другую — строптивая. Талисманами служили и магические квадраты и поэтому составление их было одною из любимых тем арабской математики. К магическому квадрату Феона из чисел до 9 они добавили квадраты из чисел до 16, 25, 36 и занимались составлением квадратов из чисел до 49, 64 и 81.

Изучались, комментировались и развивались далее и исследования Диофанта. До нас, к сожалению, не дошелъ Комментарий Абдуль Вафы, который, судя по его работам в геометрии и в тригонометрии, как плоской, такъ и сферической, представлял большой интересъ. К концу 10-го столетия относится также анонимная рукопись о рациональных прямоугольных треугольниках, в которой встре-

*) Алгебра Мохаммеда издана вместе с английским переводом Розеном—в Лондоне в 1831 г.

чается также задача о нахождении трех квадратов, составляющих арифметическую прогрессию. О математике Альходжанди, жившем также в конце 10-го столетия и подобно Абдуль Вафе давшем доказательство одной из важнейших теорем сферической тригонометрии (пропорциональность синусов углов и сторон треугольников) известно, что он пытался доказать теорему, что сумма двух кубов не может быть кубом (простейший частный случай знаменитой последней теоремы Фермата). Известный врач и натуралист Ibn Sena (Авиценна) дал теоремы, относящиеся к теории квадратичных и кубичных вычетов. В начале XI столетия два арабских математика Альнасави и Алькарчи занимались арифметикою—один под влиянием индийской математики, другой — придерживаясь преимущественно греческих классиков. Особенный интерес представляет трактат по алгебре, написанный Алькарчи и носящий заглавие Альфахри. Альфахри состоит из двух отделов; один заключает в себе учение об алгебраических вычислениях и решение определенных и неопределенных уравнений; второй представляет собрание задач. В обоих отделах Алькарчи следует во многом по следам Диофанта, часто упоминая его имя, но мы находим у него и некоторые новые результаты, не встречающиеся в греческих сочинениях, например, формулы для суммы кубов и четвертых степеней натуральных чисел (формула для суммы квадратов была употреблена Архимедом для квадратуры спирали, носящей его имя). Алькарчи усовершенствовал символизм Диофанта, вводя различные знаки для различных неизвестных, дал более полные правила для действий над выражениями, в которые входит неизвестная и рассматривал новые типы неопределенных уравнений, не встречающиеся у Диофанта. Например, он решает уравнения $y^2=x^3+ax^2$, $z^2=x^3+bx^2$, полагая $y=mx$, $z=nx$,

получая $x = m^2 - a = n^2 - b$, где m^2 и n^2 суть произвольные квадратные числа, отличающиеся друг от друга на число b—a. Об значении Алькарчи в истории развития понятия о числе мы скажем дальше.

Последним видным арабским алгебраиком и арифметиком был Омар Алхаями, живший во второй половине XI столетия († 1123 *) и пользовавшийся славою ученого и поэта. В его алгебре мы находим начало систематического изучения кубических уравнений и вычисление коэффициентов степени бинома с приложением к извлечению козней не только второй и третьей, но и высших степеней.

Средина XI столетия была эпохою блестящего расцвета арабской культуры, но вместе с тем и началом ее упадка. В 1050 г. Багдад, который вместе с своею пристанью Аль-Басрою в течение трех столетий был преемником Александрии, центром научной мысли, перешел из власти арабских халифов под власть соплеменников наших киргизов—турок из рода Сельджука. Этот переход был первым ударом нанесенным арабской культуре, но тем не менее к концу XI столетия, к началу Крестовых походов, арабы были несомненно наиболее просвещенным народом, далеко превосходя в этом отношнии своих христианских врагов. Еще до начала Крестовых походов арабское влияние проникло на Запад. Оно несомненно отразилось и на математических сочинениях Герберта (Папы Сильвестра II † 1003) **), который по словам одного

*) Алгебра Омара Алхалми переведена на французский язык и издана в 1851 известным исследователем арабской математики. Benke.

**) Труды Герберта были предметом обстоятельного изучения проф. Киевского Университета Бубнова.

См. также Nicol. Bubnow. Gerberti Opera mathematica Berlin 1899.

из его биографов „ради приобретения мудрости" жил в Кордове, хотя Герберт и является главой школы абацистов, употреблявших доску с колоннами (абакус) в то время как алгорифмики вводили систему положения с употреблением нуля. С арабского языка в первый раз был переведен Евклид на латинский английским монахом Ательгартом Батким около 1120 г.

Крестовые походы имели громадное влияние на обе столкнувшиясе и в течение более двух столетий боровшиеся стороны.

Они ослабили арабский народ и подчинили его более воинственным племенам, туркам и монголам. С другой стороны они усилили арабское влияние на христианский Запад. „Не только хлопок и сахар Палестины, перец и черное дерево Египта, самоцветные камни и пряности Индии ищет и ценит он у своего иноверного соседа. Он начинает разбираться в том культурном наследстве великого античного Востока, которого хранителем и передатчиком стал сарацин. Открывающийся мир не мог не ослепить своими красками, не подчинить своему обаянию мысль, пробужденную необычайными потрясениями... и все шире становится в западном обществе спрос на арабские географические карты, учебники алгебры и астрономии, глубже понимание красоты арабского зодчества, очарования арабской сказки и смысла „арабского Аристотеля" *)

Одною из интереснейших личностей эпохи крестовых походов, предвестницы эпохи Возрождения, был несомненно император Фридрих II Гогенштауфен, († 1250 г.) ученик сицилийских арабов, поклонник арабской культуры, вольнодумец, которому

*) Эта цитата взята нами из интересной книги проф. О. А. Добиаш-Рождественской: „Эпоха крестовых походов", Петроград 1918.

приписывалось сочинение „О трех обманщиках" (Моисее, Христе и Магомете). При его дворце в Пизе жил и работал величайший из европейских математиков средних веков, Леонардо Пизанский или Леонардо Фибоначчи, сын Боначчи, пизанского купца, торговавшего в одной из факторий, основанных итальянцами на северном побережье Африки, сам много путешествовавший. Но его жизнь нам мало известна: неизвестен и год его рождения и год его жизни. Мориц Кантор, называя его блестящим метеором, промелькнувшим на темном фоне западно-европейского средневековья, высказывает предположение, что он погиб или во время V-го Крестового похода, начавшегося в 1228 г. сопровождая Фридриха II или во время гражданской войны между Гвельфами и Гибеллинами, к партии которых он принадлежал подобно автору Divina Commedia Данте (1265-1321), трактат которого „De Monarchia" является оправданием Гибеллинизма. Важнейшие сочинения Леонардо дошедшие до нас: Liber Abaci, Liber quadratorum, Practica geometriae и Flos. Для теории чисел особенный интерес представляют два первые сочинения. Liber abaci, вышедший при жизни Леонардо в двух изданиях в 1202 и 1228 г., разделяется на 15 отделов, которые последовательно трактуют: о новых знаках индусов и как с их помощью изображать числа (1), о умножении, сложении, вычитании и делении чисел (отделы 2 — 5) об умножении, сложении, вычитании и делении чисел с дробями (6 — 7), о нахождении цен товаров и об их обмене, правиле товарищества и о правиле elchatayn (двойное ложное положение (8—13), о нахождении квадратных и кубичных корней (14), и, наконец, о правилах, относящихся к геометрии и о задачах алгебры и алмукабалы (15). Для нашей цели особенный интерес представляет 12-й отдел, посвященный „многим

разнообразным (точнее блуждающим — erraticus) задачам. Этот отдел занимает почти третью часть сочинения и повидимому ему Леонардо придавал наибольшее значение и в нем проявил наибольшую оригинальность. В этом отделе мы находим задачи, сводящиеся к сложению членов арифметической прогрессии и формулу для суммы квадратов последовательных натуральных чисел. Из числа задач три задачи представляют интерес по разным причинам. Одна из них приводится к неопределенному уравнению и Леонардо решил ее остроумным приемом. 5 лиц A, B, C, D, E хотели купить корабль сообща. Каждый может это сделать если четыре другие лица дадут ему часть своего состояния, а именно для этого A должен получить $\frac{13}{15}$, B... $\frac{401}{480}$, C... $\frac{799}{957}$, D... $\frac{341}{420}$ и, наконец, E... $\frac{326}{405}$ состояния четырех остальных.

Вторая интересна в историческом отношении и носит имя задачи о семи старухах. Старухи идут в Рим, каждая имеет 7 мулов, каждый мул несет 7 мешков, в каждом мешке лежит 7 хлебов; у каждого хлеба лежит 7 ножей, каждый нож нарежет 7 локтей. Какого общее число всего перечисленного? Не только задача, но и способ решения тождественны с задачею, встречающеюся в папирусе Ринда (см. гл. I). Через три тысячи лет после египетских школьников предлагалась эта задача в Итальянской школе. Наконец, третья задача—задача о кроликах,—приводит к замечательному ряду целых чисел и ее решение есть первый пример интегрирования уравнения в конечных разностях.

В задаче кроликов требуется определить, сколько пар кроликов родится по истечении одного года от одной пары. Предполагается, что каждая пара кроликов ежемесячно рождает новую пару, которая начиная со второго месяца уже способна к деторождению (ни один кролик не умирает). Через месяц

будет уже две пары, через два—прибавилась третья от первой, и к концу второго месяца имеется 3 пары, к концу третьего месяца—прибавятся уже две пары (от первой и второй) и будет уже 5 пар, к концу четвертого 8, к концу пятого 11... Числа образуются по закону $U_{n+1} = U_n + U_{n-1}$ и ряд, полученый Фибоначчи, есть первый возвратный ряд, встречающийся в математическом сочинении. Ряд Фибоначчи есть частный случай ряда целых чисел, получающегося при решении уравнении вида $U_{n+1} = aU_n + bu_{n-1}$ при a и b целых, и подобно общему ряду имеет замечательные свойства, на которых мы будем иметь случай остановиться. Он встречается также при решении вопроса об определении наибольшего числа делений, которое может понадобиться при нахождении общего наибольшего делителя по алгорифму Евклида; этим вопросом интересовались Ламе и Бине.

Сочинения: Liber quadratorum и Flos обязаны своим появлением ученому турниру при дворе Фридриха II. Придворные философы императора магистр Иоанн из Палермо и магистр Феодор предложили Леонардо ряд задач, в том числе две относящиеся к типу задач Диофанта. Одна из них, встречающаяся у арабских математиков, требует найти три квадрата, составляющие арифметическую прогрессию, при чем разность прогрессии наперед задана. При решении, Леонардо исходит от теоремы, по которой каждое квадратное число есть сумма последовательных нечетных чисел и из остроумно выведенных им формул для суммировании четных и нечетных квадратов. В другой задаче требуется найти три числа x, y, z так, чтоб суммы $x + y + z + x^2$, $x + y + z + y^2$, $x + y + z + z^2$ были бы квадраты ра-

*) Желающих ближе познакомится с работами Леонардо Фибоначчи отсылаем к сочинению Boncompagni: Intorno ad alcune opere di Leonardo Pisano. Roma 1854.

циональных чисел. Как и у Диофанта, решения, находимые Леонардо—суть рациональные числа.

Сочинения ученого пизанского купца были настолько выше уровня математических знаний даже ученых того времени, что их влияние на математическую литературу становится заметным только через два столетия после его смерти в конце XV века, когда многие из его теорем и задач вводятся другом Леонардо Винчи, профессором многих итальянских университетов, Лукою Пачиуоли в его сочинениях и в начале XVI века, когда группа талантливых итальянских математиков: Сципіон дел Ферро, Иероним Кардано, Тарталия, Феррари решением кубического и биквадратного уравнения положили начало высшей алгебры.

Большою известностью пользовались сочинения современника Леонардо Фибоначчи, доминиканского монаха (по мнению Кантора—второго генерала доминиканского ордена) Иордана Немораріуса († 1737). Рукописи его сочинений находятся и в Оксфорде, и в Венеции, и в Торне, и в Вене. Два из сочинений трактуют о вопросах арифметики и теории чисел. Его „арифметика" по содержанию своему напоминает сочинение Никомаха. Его „Tractatus de numeris datis" подробно изучает пропорции и различные случаи решения квадратного уравнения. Хотя сочинения Леонардо и Иордана совпадают по времени появления, в отношении ко многим вопросам они держатся различных мнений. М. Кантор считает, что если на сочинениях Леонардо отразилось преимущественно влияние Алькарчи, то Иордан, напротив, придерживался взглядов другого выдающегося арабского математика XI столетия, Альнасави.

Сочинения Леонардо и Иордана были первыми сочинениями, знакомившими Западную Европу с теориею чисел. Леонардо внес притом в изложение большую оригинальность, свидетельствующую о его

крупном математическом таланте. Но в течение более чем трех столетий можно отметить только три, четыре имени математиков, внесших новое в учение о целых числах. Упомянем из них прежде всего ученого XIII столетия известного своим переводом Евклида—Кампануса, который при доказательстве иррациональности золотого сечения, употребляет методу „неограниченного спуска" (descente infinie), которую мы встретим позже в работах Фермата и Эйлера. В XV столетии Иоганн Мюллер, известный под именем Региомонтануса (1436 — 1476), прославившийся своею короткою, но интенсивною профессорскою и научною деятельностью в области астрономии и геометрии и в особенности тригонометрии (его прах похоронен в Пантеоне Рима), интересовался и теориею целых чисел. Он первый открыл в Венеции в 1464 греческую рукопись Диофанта и в своей вступительной речи в Падуанском университете с увлечением говорил об этой находке, „в которой скрыт цвет всей арифметики, та ars rei et census, которую называют арабским именем алгебры". В напечатанных уже в конце XVIII столетия письмах Региомонтануса, сохранившихся в Нюрембергской библиотеке, мы находим 10 задач, очень различных по своей трудности. Одни из них напоминают задачи Диофанта (например 4-ая: найти три числа, сумма которых равна 116, сумма квадратов равна 4624) и = 10: найти четыре квадрата, сумма которых была бы равна квадрату *), другие—исследования Леонардо (7-ая задача: найти три квадрата, составляющие арифметическую прогрессию так чтобы меньшее из них было > 20000; 8-ая: найти три числа, которых сумма равна 216 и квадраты

*) Решения $1 + 4 + 16 + 100 = 121$ и $4 + 16 + 49 + 100 = 169$ были даны тотчас же корреспондентом Региомонтануса астрологом Яковом Спейером.

которых составляют арифметическую прогрессию).

Региомонтанус представляет блестящее исключение между учеными эпохи Возрождения: его ученая деятельность совершенно чужда того мистического направления, которое отличало большинство мыслителей этой эпохи, находившихся под сильным влиянием возродившегося Неоплатонизма. Так Николай Кузанский (1401—1464), с которого некоторые историки философии (Фалькенберг) начинают историю новой философии и которого взгляды на математическую бесконечность во многом напоминают взгляды Лейбница *), возрождает философию неоплатоников и неопифагорейцев своим обожествлением единицы и доказательством того, что она бесконечна. Числовою мистикою увлекался, как мы упоминали (см. гл. II), другой немецкий математик Михаил Стифель (1487—1567), которого Arithmetica integra есть одно из наиболее замечательных сочинений первой половины XVI столетия по алгебре, и Иероним Кардан (1501—1576), который издал в 1539 г. особое сочинение De numerorum proprietatibus. Но главный интерес и того и другого был направлен на развитие алгебры—Ars magna, и поэтому теория чисел обязана им немногим.

Но если эпоха Возрождения и вообще четыре столетия протекшие от смерти Леонардо Фибоначчи до начала работ по теории чисел Фермата (1230—1636) внесли непосредственно большой вклад в этот отдел математики, то они не прошли бесследно в истории математики в ее общем, подготовив те грандиозные ее успехи, которыми ознаменовано столетие между началом работ Декарта и Фермата и смертью Лейбница и Ньютона. Отметим прежде всего важные для теории чисел успехи логистики

*) Lasswitz. Geschichte der Atomistik Bd. I. 274 s. 99.

или практической арифметики. Потребности жизни вызвали у сумерийцев и у египтян потребность в эмпирических правилах, облегчающих вычисления и измерения; этим начинается история математики, но и до настоящего времени задачи прикладной науки вызывают к жизни новые области математической науки. Напомню П. Л. Чебышева и его исследования в области функций наименее уклоняющихся от нуля, обязанные своим началом задаче практической механики. XIII—XVII столетия были для Западной Европы эпохою великих географических открытий и начала интенсивной торговли с Индиею и американским континентом. Развитие мореплавания побуждало к изучению практической астрономии и необходимого для этой цели отдела математики — тригонометрии. Таблицы тригонометрических функций, заменившие птоломеевскую таблицу хорд, стали мало-по-малу от дробей, написанных по системе со снованием 60 (градусы, минуты, секунды, почему самые дроби носили название minutiae) переходить к десятичным дробям. История тригонометрии *) и введения десятичных дробей придает большое значение деятельности венского профессора Пеурбаха и его талантливого ученика Региомонтануса, о котором мы только-что упоминали. Но в таблицах изданных последним в 1490 г. фигурируют только целые числа, так как радиус круга принимается равным 10^5. Только в сочинении Виеты: Canon mathematicus (1-е издание в 1579, т.-е. спустя почти столетие после издания таблиц Региомонтануса) написана первая десятичная дробь. Но строго научное сочинение Виеты было мало замечено, и распространение употребления десятичных дробей есть заслуга бельгийского ученого Си-

*) Braunmühl. Vorlesungen über die Geschichte der Trigonometrie. 1900.

мона Стевина (1548—1620), известного в истории науки теоремою о параллелограмме сил. Не случайно то обстоятельство, что наиболее крупный шаг в распространении десятичных дробей был сделан нидерландским математиком. Нидерландские города: Брюгге, на одной из площадей которого стоит памятник Стевина, Антверпен, Лейден—и в XVI и в XVII столетии были центрами торговой деятельности Западной Европы, и Стевин, сам купец и инженер, как показывает заглавие главы, посвященной десятичным дробям в его книге: „Précis l'Arithmetique", появившейся въ 1585 (La disme enseignant expedier par nombres entiers sans rompus tous comptes se rencontrant aux affaires des hommes) имел в виду главным образом облегченіе деловых разсчетов *).

Сложные вычисления требуют не только упрощения, которое достигалось употреблением десятичных дробей; они нуждаются также и в проверке правильности. Такая проверка можетъ быть, как известно, достигнута рассмотреніем остатков от деления чисел на то или другое число. (Остаток от деления произведения на какое-нибудь число A должен или равняться произведению остатков от деления множителей на A или отличаться от этого произведения на кратное A). Уже у арабских математиков (Alkarchi, Ibn Albanna) мы встречаем проверку через остатки от деления на 9, 11, 8 и 7. Соответственно этому даются правила для быстраго нахождения этихъ остатков, которые вместе с тем дают признаки делимости на эти числа.

Общая теорія этих признаков делимости дана

*) В истории дисятичных дробей не может быть опущено имя Непира. Введеніе запятой есть заслуга Непира. Ему посвящено его посмертное сочиненіе: „Рабдология или вычисленіе через запятыя, „изданное в Эдинбурге в 1617 г.

Паскалем (1623—1662) в статье: Caractères de la divisibilité des nombres. Эти исследованія равно как и изученіе обращения обыкновенных дробей въ десятичные подготовляли теорию степенных вычетов, созданную Ферматом и теорию первообразных корней, созданную Эйлером, так как основывались на нахождении остатков от деления последовательных степеней числа 10*).

Параллельно с развитием практической арифметики, которое ставило и теории чисел важные задачи, шло развитие алгебры и теории уравнений; без того и другого не было-бы возможны те успехи, которые сделали теорию чисел в XVIII и XIX ст. одною из важнейших отраслей математики. История этого развития алгебры представляет большой интерес, но она выходит за пределы, нами поставленные. Поэтому я ограничусь только указанием выдающихся личностей и важнейших сочинений, периода между Леонардо Фибоначчи и Виетою. В XIV столетии такою личностью является Николай Орезм (1323—1382), профессор в „College de Navarre“ в Париже, позже епископ. Его сочинения (в одном из них, Tractatus de latitudinibus formarum, мы находим идею графического представления измеряемых явлений природы), напечатанныя в конце XV века, оказали тогда большое влияние, но за тем были позабыты и только Курце в 1868 г. снова обратил внимание на Орезма, напечатавши впервый раз его Algorismus proportionum, в котором мы встречаем уже дробные показатели степеней. В первой половине XV столетия Николай Кузанский (1401—1464) сближает снова математику

*) Вопрос о разложении обыкновенной дроби в периодическую десятичную дробь был предметом изучения даже во второй половине XVIII столетия (Lambert, Robertson, I. I. Bernoulli и рассматривается Эйлером в его Алгебре (§ 525—539) и Гауссом в „Disquisitiones“).

с философией, восстонавляя традиции греческой философии и обращает особенное внимание на вопросы, связанные с понятиями о непрерывности и бесконечности. Во второй половине XV столетія в Германии—Регіомонтанус и Видман, в Италии—друг Леонардо да-Винчи, Лука Пачиуоло, (его сочинение Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita, напечатанное в 1494 г. является энциклопедию математических знаний своего времени) и во Франции Шюке, автор сочинения Triparty en la Science des nombres, в первый раз напечатанного только в 1880 г., но которое в научном отношении гораздо выше сочинения Пачиуоло—пролагали путь к тем успехам, которые алгебра сделала в XVI столетии. Этими успехами алгебра обязана более всего итальянским ученым: Сципиону Ферро, Кардану, Тарталья, Феррари. Им мы обязаны решением кубического и биквадратного уравнения. Выдающимися сочинениями этого времени является книга Михаила Стифеля: Arithmetica integra (1544), Arsmagna (1545)—Кардана и Алгебра Бомбелли, быстро выдержавшая два издания (1572 и 1519) г. и заключавшая въ себе свод всего, что было достигнуто в Алгебре и в частности в решении кубических и биквадратных уравнений. Наконец в самом конце XVI столетия появились арифметика и алгебра Симон Стевина. О значении первой мы уже говорили. Алгебра носит название „l'Algebre avec les equations des cinq quantités", т. е. заканчивается уравнениями четвертой степени, заключающими в себе пять членов. В 1591 г. появилось первое алгебраическое сочинение Виеты (1540—1603). Виета, который первый стал обозначать символами не только неизвестныя величины, но и те, которые предполагаются известными, но остаются неопределенными, может считаться творцем буквенного исчисления и сравнительно не

большие улучшения, которые связаны с именами Жирара, Гарриота, Декарта и др. нужны были для того, чтобы создать современный алгебраический символизм.

Не менее важное значение для теории чисел, чем развитие алгебраического символизма и теории решения уравнений имело развитие основного математического понятия, понятия о числе, и на этом мы остановимся подробнее. В главе об индусских математиках мы уже упоминали о том, что они в этом отношении резко отличаясь от математиков Греции, смело прилагали правила алгебраических действий, формулированные Диофантом, к иррациональностям. Точно также поступает и Алькарчи в Альфахри; он показывает как иррациональности могут быть складываемы, вычитаемы и перемножаемы; мы находим у него, например, равенство, которое в современном обозначении напишется:

$$\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{16}.$$

В Западной Европе в XIII столетии Иорданус Немориариус в своей вышеупомянутой Арифметике и в Tractatus de numeris datis систематически употребляет общие буквы вместо определенных чисел, что мы не встречаем ни у Аристотеля, ни у Паппуса и Диофанта, ни у Арабов. При этом буквы обозначают одинаково и рациональные числа и иррациональности. Иордан и математик конца XIII столетия, переводчик Евклида, Кампанус, начинают впервые интересоваться вопросом об угле смежности (угол между касательною и кривою), который был предметом оживленных споров схоластиков и математиков XIV—XVII столетия. Этот спор был в сущности с одной стороны математическим отражением тех оживленных споров, которые велись в схоластической философии около понятий о безконечном

континууме, главным образом по вопросу о том, составлен-ли континуум из бесконечного множества неделимых точек или только содержит в себе бесконечное множество таковых (actu sive potentia). К этим и подобным спорам схоластической философии Лейбниц применял неоднократно выражение „aurum latere in stercore". И действительно, из кучи мусора, которая представляет из себя схоластическая философия по вопросу об абсолютном и относительном движении, Дюгем сумел извлечь драгоценный исторический материал. Философия математики может сделать то же самое по отношению к спорам схоластиков о бесконечном и континууме. Начало этому положено Лассвицем в его прекрасной „Истории атомистики". Повидимому наиболее ценными сочинениями схоластической философии является сочинение Томаса Брадвардина, (1290—1394), которому был присвоен титул Doctor profundus (подобно тому как Фома Аквинатский носил имя: Doctor universalis et angelicus): Tractatus de continuo и сочинение Николая Кузанского (1401—1464): De Beryllo.

С другой стороны спор об угле́ смежности, по существу спор о бесконечно малых величинах различных порядков, является прообразом тех споров, которые со времени открытия анализа бесконечно малых велись по вопросу об его основаниях. Этот спор несомненно способствовал позже углублению и расширению понятий о числе.

Но гипнотизирующее влияние 7 положения X-ой книги начал Евклида: (несоизмеримые отрезки суть те, которых отношение не может быть выражено числом) проявлялось еще и в течение XVI столетия. Один из знаменитейших алгебранетов XVI века, Тарталья, настаивает в своем „General Trattato" на необходимости различать даже словами умножение чисел и величин: в одном случае следует говорить

Франциск Виета (1540—1603).

multiplicare, во втором ducere. Виета в 1551 г. рассматривает науку чисел и науку величин, как две параллельныя, но различныя науки.

*) Mouvement absolu et relatif. Paris 1895.

Громадное значение для учения о числе имело введение вычислений с помощью десятичных дробей, о практическом значении которого мы говорили выше. Если и $\frac{2}{3}$ и $\sqrt[3]{2}$ одинаково могут быть выражены бесконечною десятичною дробью, то не должно-ли понятие о числе быть настолько общим, чтобы заключать в себе всякую десятичную дробь, получающуюся при процессе измерения величины с помощью другой, принятой за единицу. Так создавалось то общее понятие о числе, на котором уже основывается Декарт в 1637 г. в своей Geometrie и которое было формулировано Ньютоном в его Arithmetica Universalis (1707): *Число есть отвлеченное отношение некоторой величины к другой.*

В ряду предшественников Декарта и Ньютона на этом пути нельзя не отметить Непира. В его уже упомянутом сочинении: „De arte logistica", Непир рассматривает и определяет числа двух родов: numeri discreti, которые суть или integri или fracti, и numeri concreti seu geometrici quos irrationales aut surdos vocant. От этого применения одного и того-же термина для двух понятий столь резко различавшихся в греческой математике и под ее влиянием и в сочинениях ученых XVI века очевидно оставалось сделать только один шаг до „числа" Ньютона и до идеи единства математики, составляющей основную идею геометрии Декарта.

Но те другие обобщения понятия о числе, без которых была-бы невозможна современная теория чисел (введение отрицательных и комплексных чисел) развивались значительно медленнее.

Отрицательные решения уравнений отбрасывались принципиально даже Виетою и только Аль-

*) См. также Christian Wolff. Elementa matheseos.

берт Жирар (1590—1632), установляя теорему, что уравнение имеет столько корней, сколько единиц в показателе степени и выражая коэффициенты уравнения симметрическими функциями корней, тем самым приравнивал отрицательные корни положительным. Геометрия Декарта (1637 г.) показала громадное значение отрицательных чисел в важнейшей отрасли математического естествознания.

Те-же самые теоремы Жирара заставляли придавать значение и мнимым корням уравнений. Но Декарт еще писал, что „нет величин, которые-бы соответствовали им" (Oeuvres de Descartes, col. Cousin, v. 5. Paris 1824 p. 398) и Лейбниц хотя уже признавал пользу употребления мнимых величин, видел в них в то-же время чудо анализа, нечто средне между бытием и небытием (analyseos miraculum, idealis mundi monstrum, pene inter ens et non ens amphibium, quod radicem imaginariam appellamus" (Leibnitz Werke col. Gerhardt. Bd V. p. 357).

Таково было состояние тех областей математики, которые ближе всего соприкасаются с теориею чисел в конце XVI века, когда издания Диофанта пробудили интерес к исследованиям великого греческого арифметика.

В главе о Диофанте мы уже упомянули, что первое издание его арифметики появилось на латинском языке в Базеле в 1575 г.; благодаря как этому изданию, так и его переработке на французском языке, изданному Стевином, математики конца XVI столетия получали возможность ознакомления с Диофантом. Этому способствовало также тщательное издание греческого текста, снабженное многочисленными примечаниями французского ученого Баше де Мезириака, появившееся в 1621 г. Под влиянием этих изданий пробуждается интерес к проблемам Диофанта.

В 1591 г. Виета издает сочинение под заглавием: Zeteticon libri 5". *) Сочинение представляет собою собрание задач постепенно увеличивающейся трудности. 1-ая задача 1-ой книги требует найти два числа по данной сумме и разности; первые четыре книги посвящены преимущественно определенным уравнениям. Но последняя *пятая* книга заключает уже в себе 14 задач или непосредственно заимствованных у Диофанта или составленных по образцу его задач.

Решения, данные Виетою, были подробно изучены Ферматом и во многих местах его переписки и его „Замечаний" мы находим критику как решений Виеты, так и примечаний Баше.

В 1612 г. Баше издал в первый раз свое приобретшее большую популярность сочинение: „Problemes plaisants et delectables qui se font par les nombres". Второе издание той-же книги 1624 г. содержит решение уравнения $ax - by = 1$ в целых числах **).

Эйлер и Лагранж приписывают Баше теорему о том, что всякое число может быть разложено на сумму четырех квадратов. Паскаль (см. выше) и Декарт, как видно из его переписки, интересовались вопросами теории чисел. Фермат признавал в своих письмах первенство и авторитет в работах по теории чисел Френикля (1602 — 1675), члена французской Академии Наук, издавшего несколько мемуаров, посвященных отчасти теории целочисленных прямоугольных треугольников (triangles

*) См. его сочинения „Francisci Vietae. Opera mathematica". изданные в 1646 г. в Лейдене проф. Шутеном (издание имеется в Библиотеке Петроградской Академии Наук).

**) Книга Баше стала библиографическою редкостью в XIX ст., но в конце его появились одно за другим три издания, лучшее из которых 5-е (revue et annoteé par Lafon 1884). Оно издано и на русском языке под заглавиемъ: „Игры и задачи, основанные на математике".

rectangles en nombres), отчасти теории магических квадратов. Наконец Мерсенн (1588—1648) в нескольких своих сочинениях (Harmonie uni-

К. Г. Баше де-Мезириак (1581—1638).

verselle, Cogitata mathematica) остановился на вопросе о совершенных числах и числах более общего типа (aliquotaires). Но заинтересовавшись

теориею чисел под влиянием Баше, Френикля, Мерсенна Фермат благодаря своему математическому гению оставил далеко позади себя всех своих предшественников.

VII.

Фермат и Эйлер.

Как ни велико значение для математики сочинений Евклида и Диофанта, оно не может быть сравнено со значением для высшей арифметики или теории целых чисел открытий, сделанных в этой области Ферматом. Арифметические книги Евклида служат основанием всей арифметики не только высшей, но и низшей. Сочинение Диофанта относится столько-же к учению о рациональных числах, сколько к учению о целых числах. Arithmetica sublimior—высшие отделы учения о целом числе—ведет несомненное свое начало от Фермата. Теоремы, найденные им, или являются до сих пор важнейшими теоремами теории чисел (как теорема „большая“: $a^{p-1} \equiv 1$ (мод p) или послужили исходным пунктом исследований, которые и теперь еще не могут считаться вполне законченными (как например теорема о том, что простое число вида $4n+1$ единственным только образом разлагается на сумму двух квадратов—является исходным пунктом теории квадратичных форм).

Многие теоремы, им доказанные, не могли быть доказаны в течение долгого времени (так только Коши в 1819 г. доказал теорему о разложении числа на многоугольные числа) и наконец одна из его теорем (о невозможности решить уравнение $x^n + y^n = -z^n$ в целых числах при n большем 2) является до сих пор предметом глубоких исследований).

Математический гений Ферма́та проявился не только в его исследованиях о свойствах целых чисел. Вместе с Паскалем он разделяет славу соз-

П. Ферма́т (1601—1665).

дателя теории вероятностей. Лагранж в „Leçons sur le calcul des fonctions", Лаплас в введении к теории вероятностей называют его „первым и на-

стоящим творцом дифференциального исчисления и вообще анализа бесконечно малых" и несомненно, что заслуга его в истории анализа весьма велика *). Он оставил только один след в математическом естествознании, но след неизгладимый — принцип наименьшего действия, тот принцип, который ученые нашего времени—Лоренц и Пуанкаре, Планк и Гильберт стремятся положить в основание всей математической физики. По мере развития науки возрастает уважение к памяти Фермата, но уже и современники его чувствовали громадное значение его гения. Так Паскаль писал к нему: je Vous tiens pour le plus grand géomètre de toute l'Europe.... Vos enfants portent le nom du premier homme du monde".

Об жизни этого великого геометра мы знаем однако очень мало, больше, чем о жизни Евклида и Диофанта, но не много больше чем о жизни Архимеда. Мы знаем, что Фермат (1601 — 1665) принадлежал к крупной буржуазии Южной Франции (Gallia Narbonnensis, которую он сам в одном из своих „вызовов" противопоставлял Франции Северной—Gallia Celtica) и что большую часть своего времени он посвящал своей родине, охраняя в ней закон и право в качестве советника Тулузского Парламента; мы знаем, что он считался одним из выдающихся юристов Франции. Неизвестно, выезжал-ли он когда нибудь из своей родины—Южной Франции, видел-ли его когда нибудь Париж в своих стенах. Его обязанности парламентского деятеля и юрисконсульта оставляли ему время для его гениальных математических исследований и для переписки с выдающимися математиками его времени (Паскалем, Валлисом, Декартом, Робервалем, Фениклем, Mersenne и людьми, интересовавшимися

*) См. об этом подробнее мой „Историческій Очерк анализа безконечно-малых". Казань 1905.

его работами (Каркави, Дигби и др.), но не дали ему возможности, как он повидимому мечтал (его письмо к Дигби 1657 г.), изложить систематически свои открытия и методы. Результаты, найденные им, или записаны были без доказательств на полях экземпляра Диофанта, изданного Баше де Мезириаком в 1624 г. (Эти Observationes в числе 48 в первый раз были напечатаны уже после смерти Фермата в 1670 г.), или также без доказательств были сообщаемы им в письмах. Один из его корреспондентов, иезуит Билли, внимательно изучавший Диофанта и издавший о нем специальное сочинение в 1660 г. под заглавием „Diophantus geometra sive opus contextum ex arithmetica et geometria" извлек из многочисленных писем к нему Фермата содержание большого Мемуара под заглавием „Doctrinae analyticae inventum novum ex variis epistolis quas ad eum diversis temporibus misit D. P. de Fermat Senator Tolosanus", напечатанного также в 1670 г.

О методах доказательства своих теорем Фермат дал только один раз более полное, но все-таки не достаточно ясное представление в письме к Каркави в 1659 г. (Relation des nouvelles decouvertes en la science des nombres) *).

При жизни Фермата были напечатаны немногие из его теорем и напечатаны не им, но Валлисом в изданном последним в 1657 г. Commercium epistolicum.

Уже после смерти П. Фермата его сын С. Фермат издал в 1670 г. новое издание Диофанта, посвященное Кольберу, содержащее как арифметику так и трактат о многоугольных числах, в которое включены также Inventum novum—Билли, Поризмы Баше и примечания Баше к Диофанту.

*) Это замечательное письмо было издано в 1879 г. Шарлем Анри по копии, написанной рукою Гюйгенса. Oeuvres de Fermat. II p. 431.

В 1679 г. тот же С. Фермат издал „Opera varia“ отца. Издание это было в 1861 г. воспроизведено гелиотипиею в Берлине Фридлендером.

Диофант 1670 г. и Opera varia до последних годов XIX столетия служили, если не считать книги Брассина (Brassine. Précis des oeuvres mathématiques de Fermat. 1853) единственными источниками для непосредственного знакомства с работами Фермата. Мысль о полномъ издании всего, что осталось от Фермата, явилась в сороковых годах прошлого столетия и принадлежала члену Французской Академии Наук итальянцу Либри, автору сочинения Histoire des sciences mathematiques en Italie и некоторых имеющих малое научное значение мемуаров по теории чисел, *) еще более известному однако похищением из библиотек Парижа ценных книг и рукописей.

Либри заявил, что имъ приобретена ценная коллекция, принадлежавшая известному математику XVIII ст. Арбогасту, содержащая между прочим и рукописи Фермата.

Под влиянием этого заявления Министр Народного Просвещения Вилльмен провел в 1843 г. в Французской Палате депутатов закон об издании сочинений Фермата. Академия Наук назначила издателями сочинений Фермата Либри и Деспейруса, но все старания последнего добиться от Либри права ознакомиться с драгоценными рукописями были безуспешны. В 1848 г. Либри исчез из Франции, захвативши восемнадцать ящиков книг и рукописей, и затем продал свое приобретение Лорду Эшбернгаму (Ashburnham).

Часть библиотеки Эшбернгама (fonds Libri), имеющая значение для истории науки во Франции, была

*) В журнале Revue des deux mondes 1845. Tome 10. p. 681. Либри поместил биографию Фермата.

затем приобретена Национальною Библиотекою, но в ней не нашлось ничего особенно ценного для истории математических открытий Фермата.

Снова вопрос об издании полного собрания сочинений Фермата былъ поднят уже только около 1890 г. и издание это было поручено таким компетентным лицам, как Поль Таннери и Шарль Анри. Оба они известны своими работами по истории математики и в частности статьями, относящимися к Диофанту и Фермату.

Издание это, начатое в 1894 г., было закончено только в 1912 г. и заключает в себе четыре тома.

I том.—Математические сочинения Фермата и в том числе observationes.

II томъ.—Переписка Фермата.

III том. Перевод на французский язык как всех сочинений Фермата, написанных на латинском языкѣ, так и „Inventum novum" и „Commercium epistolicum" Валлиса.

Наконец IV том (1912), кроме прибавлений к переписке заключает в себе весьма ценные „Notes mathematiques" Шарля Анри, дающие библиографию по теоремам и задачам Фермата.

Скудости сведений о жизни Фермата соответствует еще большая скудость сведений о ходе его работъ, о времени его важнейших открытий, о методах, которыми он находил и доказывал свои теоремы. Мы можем сказать только, что изобретательный гений Фермата проявился особенно между 1636 г. и 1641 г., т.-е. когда ему было от тридцати пяти до сорока лет. Первые письма его, относящиеся к теории чисел, написаны в 1636 г. После 1641 г. он занялся уже приложением общих методов и теорем. (P. Fannery). Sur la date des principales decouvertes de Fermat (Bulletin Darboux 1883).

Повидимому внимание Фермата к вопросам теории чисел было привлечено двумя вопросами, ко-

торые интересовали и его современников (Декарта *) и корреспондентов Френикля и Отца Мерсенна)—вопросом о совершенных числах и вопросом о магических квадратах. Мерсенн, как можно судить по предисловию к сочинению Cogitata mathematica (1644), обладал методами нам неизвестными.

Совершенные числа сыграли таким образом снова важную роль в теории целых чисел. Разыскивая те простые показатели p, при которых $2^p - 1$ есть также простое число (к этому сводится вопрос о *четных* совершенных числах **), Фермат дает в письме к Мерсенню в авг. 1640 г. частный случай своей знаменитой теоремы. Называя показателями совершенных чисел ряд 1, 2, 3, 4....., а радикалами их — числа вида $2^n - 1$, т.-е. 1, 3, 7, 15, 31, 63..., Фермат утверждает, что радикал, уменьшенный на 1, всегда делится на соответствующий показатель, если он есть число простое, т.-е. употребляя современную терминологию $2^p - 2 \equiv 0 \pmod p$.

Обобщение этого результата на произвольное a, т.-е. теорему $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ Фермат дает в том же году в письме от 18 окт. 1640 г. к Френиклю. В предвидении значения найденной им теоремы он пишет: „mi par di veder un gran lume". *) С теоремою Фермата, которая иногда называется „малою" в отличие от теоремы, что уравнение $x^m + y^m = z^m$ может быть решено в целых числах только для $m = 2$ (большая или последняя) мы будем встречаться еще много раз. Теперь ограничусь

*) См. его письмо К. Френиклю от 20 дек. 1638 г., в котором Декарт выражает свое мнение, что можно найти нечетные совершенные числа.

**) См. мое введение в анализ стр. Числа вида $2^p - 1$ носят название чисел Мерсенна.

*) Oeuvres de Fermat. Vol. II p. 199.

указанием, что $q(a) = \frac{a^{p-1}-1}{p}$ часто носит название частного Фермата и имеет многие интересные свойства, найденные Эйзенштейномъ, Штерном, Сильвестром. В последнее время на эту числовую функцию обращено особенное внимание в связи с последнею теоремою Фермата (см. гл. XIV).

Желающих познакомиться с этим вопросом отсылаю прежде всего к мемуару Мириманова (Journal für reine und angew. Mathematik Bd. 115—1895 г.)

Упомяну из интересных свойств частного Фермата следующие. Если знаком $\frac{1}{\alpha}$ обозначить целое число β, удовлетворяющее сравнение $\alpha\beta \equiv 1$ (мод p) (числа α и β будем называть союзными (socii), то $q(2) \equiv 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots \frac{1}{p-2}$ (мод p). (Например если $p = 11$, $\frac{1}{3} \equiv 4$, $\frac{1}{5} \equiv 9$, $\frac{1}{7} \equiv 8$, $\frac{1}{9} \equiv 5$ (мод n) и следовательно $q(2) \equiv 27 \equiv 5$ (мод 11). Действительно $q(2) = 93 \equiv 5$ (мод 11).

Другой важный результат, найденный Ферматом и послуживший исходным пунктом важнейших исследований (теория квадратичных форм) также связан с математическим фактом, известным Египту и Вавилону, с равенством $5^2 = 3^2 + 4^2$ (см. гл. II). Замечание Фермата к задаче 22-ой третьей книги Диофанта; первой задаче, в которой Диофант говорит о прямоугольных треугольниках, т.-е. о трех рациональных числах удовлетворяющих уравнений $x^2 + y^2 = z^2$, изложено в следующих словах:

„Простое число формы $4n + 1$ есть только один раз гипотенуза прямоугольного треугольника, его квадрат — дважды, куб — трижды, биквадрат — четырежды и т. д.

Такое простое число и его квадрат только одним способом разлагаются на два квадрата; его куб и

биквадрат — дважды; его квадрато-куб и кубо-куб трижды и т. д.“

Первая из этих теорем Фермата связана с утверждением, что в случае $p = 4n + 1$ можно решить уравнение $Z^2 + 1 \equiv Q$ (мод p) или, употребляя символ Лежандра, что $\left(\frac{-1}{p}\right) = +1$, если $p = 4n + 1$.

Таким образом Фермату была известна первая из дополнительных теорем к закону о взаимности теории квадратичных вычетов.

Теоремы Фермата, касающиеся представления числа под видом суммы двух квадратов могут быть обобщены в различных направлениях и эти обобщения были намечены самим Ферматом.

С одной стороны Фермат дает теоремы, касающиеся представления чисел под формам $y^2 + 2z^2$ и $y^2 + 3z^2$. Формы более сложные не рассматривались Ферматом за исключением вопроса о представлении единицы под видом $y^2 - ax^2$ или другими словами о решении уравнения $ax^2 + 1 = y^2$, для которого им был найден неизвестный нам способ решения $ax^2 + 1 = y^2$. Решение этого уравнения было одною из тех задач, которую Фермат в феврале 1657 г. через Кенельма Дигби предложил для решения математикам Франции, Англии, Голландии и всей Европы, как задачу и по тонкости и по трудности не ниже самых знаменитых задач геометрии, — в следующих выражениях:

„Существует бесконечное множество квадратов, которые по умножении на данное неквадратное число и по прибавлении единицы дают квадрат“.

В сентябре 1657 г. Валлис сообщает Дигби решение, найденное Брункером *) и с некоторыми

*) Wallis. Commercium epistolicum. Oeuvres de Fermat vol 3. lettre IX

изменениями поместил его в своей Алгебре. Эйлер нашел это решение в английском переводе немецкой алгебры и приписал его переводчику Пеллю. Отсюда название знаменитого уравнения Пеллевским. Автор специального сочинения по истории уравнения $t^2 - Du^2 = 1$ Конен предлагает называть его уравнением Фермата; оно могло-бы носить также название индийского или быть связанным с именами Архимеда и Феона Смирнского (см. гл. III и IV).

Обобщением теоремы о представлении простого числа вида $4n+1$ под видом суммы двух квадратов является знаменитая теорема Фермата, найденная им еще в 1637 г. и по которой „всякое число есть или треугольное или сумма двух или трех треугольных, квадратное или сумма двух, трех или четырех квадратов, пятиугольное или сумма двух, трех, четырех или пяти пятиугольных и т. д. для чисел шестиугольных, семиугольных и вообще многоугольных". Через 16 лет он сообщил эту теорему Паскалю с указанием на то, что ее доказательство основывается на теореме о том, что всякое простое число вида $4n+1$ разлагается на сумму двух квадратов. Эта теорема, которую Фермат сам назвал theorema pulcherrimum, была в частных случаях доказана Эйлером и Лагранжем. Общее доказательство ее дано было Коши в 1815 г. и находится в связи с общею теориею квадратичных форм *). Фермат обобщал теорему о представлении числа под видом суммы двух квадратов и в другом направлении, рассматривая разложение на сумму двух кубов или биквадратов: „я могу решить задачу, которая была неизвестна Баше, а именно разложить число, составленное из двух кубов на два другие куба и притом бесчисленным числом

*) См. Bachmann. Die Arithmetik des quadratischen Formen. Leipz. 1898, p. 154.

способов". (Observatio IX ad Dioph. problem II libri IV) *).

„Почему Диофант не ищет двух биквадратов, сумма которых была бы квадрат? Эта задача невозможна, как я могу доказать вполне строго моим методом". (Observatio XXXIII ad Dioph. problem 32 libri V).

В тесной связи с этими задачами находится утверждение Фермата, что площадь прямоугольного треугольника не может быть равна полному квадрату (стороны прямоугольного треугольника суть целые числа, связанные равенством $x^2+y^2=z^2$). Доказательство этой теоремы сводится на доказательство теоремы, что разность двух биквадратов не может быть квадратом.

Наконец в связи с этою последнею теоремою находится та знаменитая „последняя" не доказанная теорема Фермата, по которой уравнение $x^n+y^n=z^n$ не может быть решено в целых числах. Истории доказательств частных случаев этой теоремы мы коснемся дальше. Читатель увидит какие трудности нужно было преодолеть и какие новые обобщения и понятия нужно было ввести для того, чтобы найти эти доказательства. Загадкой остается поэтому до сих пор, имел-ли Фермат доказательство теоремы, которую один французский математик называет „вызовом человеческому разуму" (un défi à l'intelligence humaine).

Глубокое изучение Диофанта привело Фермата к постановке новых задач подобных задачам греческого математика, но представлявших большие трудности. Приведу в пример таких задач задачу, помещенную как замечание к 24-ой задаче 6-ой книги Диофанта: найти прямоугольный треугольник, которого гипотенуза равно как и сумма кате-

*) Oeuvres de Fermat. Vol. I p. 291, 342.

тов были-бы полными квадратами. Задача приводится к двум уравнениям:

$$x^2 + y^2 = u^4$$

$$x + y = z^2$$

Она интересна во многих отношениях и по громадности целых чисел, фигурирующих в решении (катеты выражаются числами из 13 цифр) и по тому, что по поводу этой задачи Фермат дает более подробные указания на свои методы и наконец потому, что она была предметом работ Эйлера и Лагранжа (см. след. главу). Задача как видно приводится к двойным уравнениям Диофанта т.-е. к системе двух уравнений. Фермат во многих своих замечаниях указывает, что он может решать и систему трех уравнений. В „Inventum novum" Билли и обращено особенное внимание на задачи этого типа.

Отметим в заключение то единственное предложение Фермата, которое оказалось неверным и которое часто и логиками и математиками приводится как пример неверной индукции. Предложение это занимало Фермата очень долго, о нем он пишет в 1637 г., в 1640 и наконец Паскалю в 1654 г. В последнем письме он сознается, однако, что доказательство не вполне закончено. В предложении утверждается, что все числа вида $2^{2^n}+1$ суть числа абсолютно простыя. Для $n = 0,1,2,3,4$ это утверждение верно, но Эйлер, (и это было сделано им в его первом мемуаре по теории чисел в 1732 г.) показал, что для $n = 5$ получается число сложное.

Впоследствии было доказано, что сложные числа получаются также для $n = 6$ (Landry и Lelasseur 1880), $n = 9$ (Western 1903), для $n = 11$ (Кэннингам 1899), для $n = 12$ (Lucas и С. Первушин 1878),

для $n = 12$ и 18 (Western 1903), для $n = 23$ (С. Первушин 1878), для $n = 36$ (Seelhoff 1886) и наконец для $n = 38$ (Cunningham и Western 1904) *).

Таковы главные результаты, найденные Ферматом. Они дошли до нас разбросанные, рассеянные, дошли без всякого указания на путь, который привел к их открытию и на методы, которыми Ферма́т их доказывал. В письме к Мерсенню от Сентября 1636 г. Ферма́т сожалеет, что он не может дать доказательства, зависящего „от запутанных тайн науки о числах" и сообщает о своем намерении написать особое сочинение, которое расширит науку далеко за пределы, достигнутые древними. Но это намерение не было осуществлено и таким образом мы лишились ценного указателя методов, которыми пользовался Ферма́т для доказательств результатов найденных вероятно путем индукции и аналогии. Ферма́т, как видно из его письма к Дигби (1657 г.) прекрасно понимал что „то, что в математикѣ выводится путем аналогии не есть истина..... Правило подходящее к некоторым частным случаям может быть очень полезно, но не как основание науки; в этом случае можно удовлетвориться только доказанным (письмо к Дигби 1657 г.). Но только с одним из своих методов и при том в общих и неясных чертах познакомил Ферма́т своих современников в письмѣ, озаглавленном: „Relation des nouvelles decouvertes en la science des nombres", найденном Анри в Лейденской библиотеке, а именно с тем методом беспредельного спуска (descente infinie), идею которого мы встречаем у Евклида и который был, как мы уже сказали, применен Кампанусом для доказатель-

*) Желающих более подробно познакомиться с этими исследованиями отсылаем к статье Cunningham и Western (Proceedings of the London Mathematical Society. 1904 г.).

ства иррациональности „золотого сечения". В особенности, пишет Фермат, этот метод полезен при доказательстве невозможности; например, при доказательстве теоремы, что не существует ни одного прямоугольного треугольника, стороны которого суть целые числа и площадь которого равна квадрату. Можно доказать, что в случае, если такой треугольник существует, то можно найти другой, выражающийся в меньших числах и имеющий то-же свойство. От этого треугольника можно перейти к третьему, к четвертому и т. д. до бесконечности, но так как не существует бесконечного ряда уменьшающихся величин, то первое предположение неправильно".

Что касается до способа перехода от одного треугольника к другому, то Фермат в своем письме предлагает Паскалю, Робервалю и другим найти этот способ.

Относительно других методов Фермата можно делать только гипотезы. Одну из таких высказывал Кронекер в своих частных беседах, предполагая, что Фермат далеко ушел в том отделе теории целых чисел, который может быть назван аддитивным в отличие от разработанной в течение XVIII и XIX ст. мультипликативной.

В течение столетия замѣчательные результаты, найденные Ферматом в новой отрасли математических наук, оставались почти незамеченными; внимание виднейших математиков в период времени от года смерти Фермата (1665) до года появления первой работы Лагранжа (1768) было направлено главным образом на развитие высшего анализа. Ньютон в своей „Arithmetica universalis" почти не касался вопросов неопределенного анализа.

Универсальный гений Лейбница не мог однако оставить без внимания теорию целых чисел. Раскопки, которые за последние двадцать лет были

произведены в рукописях, листках и лоскутках бумаги, сохранившихся после Лейбница в Королевской Ганноверской библиотеке Ваккою, Кутюра и Дитрихом Манке *) показали, что Лейбниц втечение многих лет с любовью и настойчиво работал над одним из важнейших вопросов теории чисел, над вопросом о нахождении уравнения, которое характеризовало бы абсолютно простые числа и позволяло для каждого числа решать вопрос о его характере. Мы увидим сейчас, что именно этот вопрос был для Эйлера важнейшим вопросом теории чисел и к нему сводились его главные исследования.

Как известно занятия логикою и метафизикою заставили Лейбница заинтересоваться тем отделом чистой математики, который рассматривает перемещения и сочетания—комбинаторикою или комбинаторным анализом. И его первое математическое сочинение „De arte combinatoria" (1666), написанное в возрасте 19 лет посвящено этому отделу. Комбинаторика приводит легко к теоремам теории чисел и именно она привела Лейбница к частным случаям теоремы Фермата несомненно до знакомства с „Varia Opera Фермата, напечатанными в 1679 г.

Комбинаторика показывает, например, что число $\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6}$ как число различных соединений $m+1$ предметов по три, есть число целое, т.-е. что $(m+1)(m+2)(m+3) = m^3+6m^2+11m+6$ делится для всякого m на 6 и следовательно на 3. Но отсюда легко заключить, что и двучлен m^3+11m, а следовательно и двучлен m^3-m делится при всяком m на 3. Подобным же образом Лейбниц в 1676 г. убедился повидимому что m^5-m делится на 5 и m^7-m делится на 7, но вместе с

*) См. статью последнего в Bibliotheca mathematica 1912—13 г.

тем нашел, что $2^9 - 2$ не делится на 9 и прибавляет к этому последнему результату замечание: „exemplum elegans inductionis deceptricis“ (изящный пример ошибочной индукции). Лейбниц, как известно также давно, очень интересовался бинарною системою нумерации, рекомендуя ее иезуиту-миссионеру как способ убедить атеистов китайцев в существовании божества. Изучение периодических дробей, как десятичных так и бинарных, привело Лейбница также к теореме Фермата. В своих исследованиях Лейбниц пошел дальше Валлиса и ранее Ламберта *) и видел тесную связь вопроса о числе цифр в периоде с теоремою Фермата. Он пробовал также доказать иррациональность числа π на основании того, что $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \ldots$ должно иметь бесконечно длинный период, не обративши внимания на то, что на этом основании должно было быть иррациональным и число $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots$

Эти исследования Лейбница относятся к 1677—1680 г. и на листочке, датированном 12 сент. 1680 г., Лейбниц дает и теорему, по которой для простого числа p при всяком a двучлен $a^p - a$ делится на p и доказательство, основанное на найденной уже в 1676 г. теореме о степени полинома. Это доказательство указано и в мемуаре „Nova algebrae promotio“, напечатанном в первый раз только в XIX столетии *).

Так как, как было указано выше, Opera varia появились в печати в Тулузе только в 1679 г. и пере-

*) Acta Helvetica 1758 (Nova acta eruditorum) 1769. Adnotatio quaedam de numeris eorumque anatomia). В этом мемуаре Ламберт, как указывает и Гаусс, почти закончил теорию периодических десятичных дробей.

*) Leibnitzens Math. Schriften herausg. von Gerhardt VII. Halle. 1853—1863 (Bd. VII p. 180).

сылка книг шла медленно, то есть основание думать, что тогда Лейбниц еще не знал о том, что Фермат нашел эту теорему. В его рукописях находятся выписки из сочинений Фермата, но тем не менее в Nova algebrae promotio он ни словом не упоминает о своем предшественнике.

Лейбниц придавал громадное значение теореме им найденной, так как ошибочно думал, что из уравнения $2^{x-1} - 1 = nx$ следует непременно, что x есть абсолютно-простое число. Найдя теорему Фермата, он неправильно формулировал обратную теорему (впрочем следует заметить, что правильная формулировка дана была только Э. Люка). На уравнение $2^{x-1} = nx + 1$ Лейбниц смотрел как на „definitio realis seu aequatio realis numeri primitivi", и метод, которым он пользовался для того, чтобы при помощи этого уравнения решить вопрос о природе числа, близко подходит к теории индексов созданной Гауссом.

Но если Лейбниц, как мы теперь знаем, интересовался теориею чисел, то как Яков и Иоанн Бернулли, так и ученики последнего не оставили работ в области теории чисел за исключением гениальнейшего из этих учеников Леонарда Эйлера. (1707—1783). Эйлер заинтересовался теориею чисел повидимому под влиянием Христиана Гольдбаха (1690—1764), члена Петербургской Академии Наук по кафедре высшей математики. В изданной П. Г. Фуссом „Correspondance mathematique et physique de quelques celèbres géomètres du XVIII siecle" первый том содержит в себе переписку Эйлера и Гольдбаха (177 писем), начавшуюся в 1729 и закончившуюся в 1764 году—смерти Гольдбаха. Письма Гольдбаха показывают универсальность знаний Гольдбаха и интерес к теории чисел, в которой

**) Vacca. (Bibliotheca mathematica t. 8. 1894).

одна не доказанная и по ныне теорема связана с именем Гольдбаха. В письме к Эйлеру (7 іюня 1742) Гольдбах will eine conjecture hazardiren: „Каждое число большее 1 есть сумма трехъ простых чисел" В ответном письмѣ из Берлина от 30 іюня 1742 г. Эйлер пишет, что он считает „für ein ganz gewisses Theorem", что каждое четное число есть сумма двух простых чисел.

Интерес Гольдбаха к теорий чисел несомненно повлиял на Эйлера. Первое письмо от 24 окт. 1729 г., которым началась продолжительная и интересная переписка, было написано Эйлером и касалась одного бесконечного произведения. Ответное письмо Гольдбаха заканчивалось припискою: „известно-ли тебе замечание Фермата, что все числа вида $2^{2^x}+1$ суть числа простые, при чем он признавался, что не может этого доказать, „как и после него, насколько я знаю, никто не доказал". Переписка 1730 г. часто касается того же вопроса, а также характера чисел вида 2^x-1. В 1732 г. Эйлер представляет в Академию свой первый мемуар, в котором показывает неверность утверждения Фермата. И позже Гольдбах часто представляет на суд Эйлера свои работы по теории чисел, которою он особенно интересовался. Укажу, что Гольдбах первый в мемуаре об уравнениях, имеющих только несоизмеримые корни, употребил термин congruus (сравнимый) в том же смысле, в котором он был позже введен Гауссом.

Первая работа Эйлера была представлена им в Петербургскую академию Наук в 1732 г.; за год до смерти в 1782 он представил в ту-же Академию работу, посвященную вопросу о нахождении треугольника, в котором линии, соединяюшие вершины с центром тяжести, выражались бы рациональными числами. В эти пол-века Эйлер изложил свои

исследования по теории чисел в ста мемуарах, в начатом но не оконченном Tractatus de numerorum doctrina и в Алгебре, в которой более половины

Леонард Эйлер (1707–1783).

сочинения посвящены анализу Диофанта. С благодарностью нужно отметить, что в 1844 г. Академия предприняла (по инициативе Якоби) издание собрания

сочинений Эйлера (Opera minora collecta) и как первые два тома этого собрания были изданы внуками Эйлера П. и Н. Фуссами при деятельном участии В. Я. Буняковского и П. Л. Чебышева, составивших систематический указатель мемуаров, два тома Commentationes arithmeticae collecte. Изучение работ Эйлера по теории чисел не представляет поэтому больших затруднений; только завершение предпринятого Швейцарским Обществом Естествоиспытателей по инициативе международных математических конгрессов (Цюрихского, Гейдельбергского и Римского) издание сдѣлает возможным удобное изучение работ Эйлера в других областях чистой и прикладной математики.

Переходим теперь к анализу работ Эйлера. Я разделю их для большого удобства на две группы: *A)* работы, в которых Эйлер развивает, дополняет и обобщает работы своих предшественников—Ферма́та и Диофанта и *B)* работы, в которых он ввел в теорию чисел новые методы и указал ей новые задачи. Работы первой группы можно кроме того разделить на работы, примыкающие к теоремам Ферма́та (A,I) и на работы по анализу Диофанта (A,II).

A I) Какъ было уже указано, первыми вопросами теории чисел, которыми заинтересовался Эйлер под влиянием Гольдбаха еще в 1730 г., был вопрос о характере (utrum sint primi aut compositi) чисел вида $2^{2^n}+1$ и 2^n-1, и в связи с этим вопрос о возможности указать сколь угодно большое простое число. Этому вопросу посвящена и первая печатная работа Эйлера *), напечатанная в 1732 г. и резюмирующая работы Эйлера за два года. В ней Эйлер,

*) Для сокращения цитат и удобства читателя мы будем в дальнейшем только в исключительных случаях приводить заглавие мемуара и указывать страницы „Commentationes", вообще же ограничимся только указанием номера мемуара и года, к которому он относится.

давши делитель (64) числа $2^{32}+1$, показывает этим ошибочность Ферматовского утверждения, что все числа вида $2^{2^n}+1$ суть простые, поправляет также ошибку Вольфа, считавшего числа 2^9-1 и $2^{11}-1$ простыми, но сам ошибается, утверждая, что совершенные числа получаются по формуле

$$2^{n-1}.(2^n-1) \text{ для } n=41 \text{ и } 47.$$

Ошибка эта была исправлена в XIX столетии Плана и Ландри, показавшими, что числа $2^{41}-1$ и $2^{47}-1$ суть числа сложные *). В конце мемуара он дает без доказательства несколько теорем и между прочим обобщение теоремы Фермата на случай модуля вида n^m.

Мемуар 1732 г. открывает собою ряд мемуаров, посвященных доказательству теоремы Фермата и ее обобщению в двух направлениях. Во-первых Эйлер обобщает теорему Фермата на случай сложного модуля, вводя числовую функцию $\varphi(m)$, выражающую число чисел взаимно-простых с m и меньших m. По этой обобщенной теореме, носящей имя Эйлера

$$a^{\varphi(m)}-1 \text{ (мод. } m).$$

(См. мемуары XX (1759) и LII (1775).

Во-вторых, теорема Фермата является только одним наиболее важным результатом созданной Эйлером теории степенных вычетов.

Эйлер дает несколько доказательств теорем Ферма́та; одни из них, совпадая по идеям с доказательством Лейбница, основываются на свойствах коэффициентов бинома Ньютона; (таково доказательство данное в IV. 1736); другие основываются на теории степенных вычетов и эти доказательства предста-

*) Более подробные сведения читатель найдет в книге Люка: Theorie des nombres v. I p. 374. У него, однако, вкралась ошибка: еще до Ландри Эйлер нашел делитель 431 для числа $2^{43}-1$.

вляют особенный интерес. В мемуаре XIX (1758) Эйлер доказывает, что если в ряду остатков от деления на простое число p членов геометрической прогрессии

$$1,\ a,\ a^2,\ a^3,\ldots.$$

(a есть число не делящееся на p), имеется λ различных остатков ($a^\lambda \equiv 1$ (мод. p)), то λ есть делитель числа $p-1$ или $p-1=n\lambda$, где n есть целое число. (Теорема Фермата тогда очевидна, ибо из $a^\lambda \equiv 1$ (мод. p) следует $a^{n\lambda} \equiv a^{p-1} \equiv 1$ (мод. p)). Рассуждения Эйлера в этом доказательстве тожественны с рассуждениями, которыми Лагранж в Reflexions sur la résolution algebrique des equations (1770) *) доказал теорему, что порядок подгруппы перемещений есть делитель порядка группы. Теоремы Эйлера и Лагранжа составляют частные случаи одной из важнейших теорем теории конечных групп (см. дальше гл. X).

Теория степенных вычетов, важнейший результат которой был найден Ферматом, тем не менее является в целом созданием Эйлера и ей посвящено очень много мемуаров, (важнейшие из них XIX и XX—1758, и в особенности XXXV и XXXVII—1772). В двух последних мемуарах он дает определение первообразного корня. Эйлер не доказал существование первообразного корня и не определил число их, как это было сделано Гауссом на основании свойств Эйлеровской функции $\varphi(m)$, он не ввел в теорию чисел аналога логарифма, как это было сделано также Гауссом, но тем не менее теория степенных вычетов является величайшей заслугою Эйлера в области теории чисел т. к. без нее не былибы возможны исследования Гаусса в теории решения двучленных уравнений, важные и для теории чисел и для высшей алгебры.

*) Oeuvres de Lagrange T. III p. 205-421.

Теорема Кронекера, по которой решение всех целочисленных абелевых уравнений сводится к решению двухчленных уравнений, еще более выделяет важность теории степенных вычетов и первообразных корней в той области исследований, которая носит название арифметической теории алгебраических величин. Этого громадного значения теории степенных вычетов Эйлер не мог предвидеть; для него эта теория имела значение главным образом потому, что он нашел в ней путь для решения задачи, которая интересовала его всю жизнь и которая до него интересовала Фермата и Лейбница и которою мы для краткости назвали задачею о характере числа (Naturam numerorum indagandi problema). Из теории степенных вычетов вытекает, что делители числа вида $a^q - 1$, если q есть число абсолютно простое, или суть делители числа $a - 1$ или имеют форму $2nq + 1$. Применяя это следствие к числу вида $2^{31} - 1$, делители которого должны иметь форму $62n + 1$, Эйлер в 1772 доказал утверждение Фермата, что это число (2147483 647) есть число простое (Com. Arithm. I. I. p. 584).

Решение той же самой задачи Эйлер долго и настойчиво искал и по другому пути, исходя из теоремы Фермата, по которой простое число вида $4n + 1$ единственным образом разлагается на сумму двух квадратов, теоремы, которую Эйлер доказал в особом мемуаре (XV, 1754), и из аналогичных теорем о представлении чисел под видом

$$x^2 + 2y^2,\ x^2 + 3y^2,\ x^2 - 2y^2.$$

Эйлер заменил вопрос о представлении числа известного вида вопросом о делителях таких чисел и уже в 1744 г. дал ряд индуктивным путем найденных теорем о делителях чисел вида $pa^2 \pm qb^2$ (VI. 1746) и затем в ряде последовательных мемуаров изучал с той же точки зрения числа, которые

суть сумма двух квадратов (XII. 1752), числа формы $2a^2 + b^2$ (XIII. 1754), числа формы $a^2 + 3b^2$ (XXI. 1759) и наконец снова числа более общей формы $mx^2 + ny^2$ и $x^2 + my^2$. Уже теоремы мемуара 1744 (VI) в сущности представляют пример и следствия знаменитого закона взаимности двух простых чисел в теории квадратичных вычетов. В 1772 г. Эйлер в мемуаре: „Observationes circa divisionem quadratorum per numeros primos" (XXXIV) (мемуар был напечатан только в 1783 в Opuscula analytica), формулировал, как в первый раз указал Чебышев в предисловии к Теории сравнений в 1849 и затем Кронекер в 1875 г. (Bemerkungen zur Geschichte des Reciprocitätsgesetzes, Werke Bd II), закон взаимности почти в той же самой форме, как это было сделано Гауссом в Disquisitiones arithmeticae, так что Эйлеру принадлежит заслуга открытия этой замечательной и имеющей громадное значение теоремы теории чисел, о которой нам еще не раз придется говорить в следующих главах нашей работы. Мемуар 1772 г., как показывает его название, посвящен рассмотрению вычетов, получающихся от деления квадратов на простые числа и к этому вопросу, т.-е. к теории квадратичных вычетов Эйлер был приведен изследованиями делителей чисел формы $x^2 + my^2$, в которых он видел способ определения природы числа. Действительно изучение вопроса о делителях чисел вида $x^2 + my^2$ сводится на решение вопроса о том, для каких чисел p сравнение $x^2 + m \equiv 0 \pmod p$ может быть решено или, употребляя символ введенный Лежандром, на определение вида чисел p, для которых $\left(\frac{-m}{p}\right) = +1$.

Имея в виду постоянно вопрос о натуре числа, Эйлер естественно остановился подробно на тех значениях произведения mn в формуле $mx^2 + ny^2$, которые делают эту форму особенно *удобною*

(idonea) для его цели и назвал соответствующие числа: numeri idonei. Такими числами являются те числа, для которых, как напр. для чисел 1, 2, 3, существует теорема: простое число единственным образом представляется под видом

$$mx^2 \pm ny^2$$

так как в таком случае очевидно, что найдя для какого нибудь числа N два разложения

$$N = ma^2 \pm nb^2 = mc^2 \pm nd^2,$$

мы заключаем отсюда, что N есть число сложное. Применению этих удобных чисел к определению природы числа и посвещены мемуары (LIX, XL, LXIII, LXIV, LXVI — все они относятся к 1778, к которому относится и мемуар LXII — о природе числа $1000^2 \pm 3^2$ т-е 1.000.009).

Каковы numeri idonei и как велико их число — этот вопрос очень интересовал Эйлера. Он изучил с необыкновенным даже для него трудолюбием с этою целью все целые числа до 10.000 и дальше (usque ad 10.000 et ultra. LXIV) и нашел таких чисел 65. Первые из них: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 18. Последнее из них 1848 и соответствующая форма $x^2 \pm 1848\, y^2$ дала ему возможность доказать относительно многих чисел, например 18.518.809, что они суть числа простые (LXVI, 1778). Эйлер более чем какой либо другой великий математик позволяет изучающему его работы проникнуть в лабораторию его мысли, и в этом отношении страницы, посвященные им изучению „удобных" чисел, представляются наиболее поучительными. Найдя 65 удобных чисел, Эйлер естественно желает найти свойства, отличающие эти числа от прочих целых чисел, и его работу в этом отношении можно уподобить работе натуралиста, внимательно изучающего отличие нового вида насеко-

мого или ископаемого от других с ним схожих. В мемуаре LXI (1778) он приводит свои наблюдения: 1) между удобными числами только шесть суть абсолютно-простые числа (2, 3, 5, 7, 13, 37); 2) только пять чисел суть удвоенные простые, 3) только 24 числа суть произведения двух простых чисел; большинство есть произведение трех или большего числа; 4) промежутки между удобными числами становятся все меньше; сначала все числа до 11 суть удобные; в конце между 1365 и 1848 нет ни одного удобного числа. Из своих наблюдений Эйлер выводит, что 1848 есть последнее удобное число и это предположение является для него весьма вероятным и в то же время парадоксальным (insigne paradoxon). Утверждение Эйлера остается до сих пор ни подтвержденным, ни опровергнутым. Вопрос об удобных числах поставлен Гауссом (Disq, Arith. § 303) в связь с классификациею бинарных квадратичных форм на роды и классы, а новейшие работы Вебера указали связь этого вопроса с теориею преобразования и комплексного умножения эллиптических функций (H. Weber. Elliptische Functionen und algebraische Zahlen. 1891 стр. 475 и его мемуар в Mathem. Annalen, Bd. 23).

Указавши ряд работ Эйлера, связанных общею целью—решить поставленную Ферматом задачу о нахождении абсолютно-простого числа большего чем всякое заданное число и исследовать природу числа и имевших исходным пунктом две теоремы Фермата, отметим теперь исследования Эйлера, примыкавшие к другим теоремам Фермата.

Таковыми были во-первых работы Эйлера, имевшие целью доказать теорему Фермата о разложении всякого числа на m m-угольных чисел.

Эйлер ограничился здесь только частными случаями о разложении на три треугольные и четыре

квадрата (XV 1754 L. III 1775). Общая теорема Ферма́та была доказана только Коши, в 1815 г.

Большее значение имели работы Эйлера по поводу последней теоремы Ферма́та. О них мы будем иметь случай говорить далее (см. гл. XIV), ограничимся теперь указанием, что Эйлер дал доказательство двух частных случаев теорем Ферма́та, доказавши методом неопределенного спуска, что сумма двух кубов не может быть кубом (Алгебра ч. 2. § 13) и что сумма двух биквадратов не может быть квадратом, а следовательно и биквадратом (V. 1738).

А. II. Переходим теперь к многочисленным работам Эйлера по анализу Диофанта. Классификация задач и уравнений анализа Диофанта может быть основана или на внешнем признаке, например на числе уравнений, к которым приводится задача, или же на внутренних свойствах задачи.

В „Index systematique et raisonné" арифметических мемуаровъ Эйлера, составленном В. Я. Буняковским и П. Л. Чебышевым, проведена классификация по числу уравнений и соответственно этой классификации мемуары Эйлера могут быть разделены по следующим вопросам:

1) определение двух или более неизвестных определенных *одним* уравнением. К этому отделу относится, например, вопрос о решении общего уравнения 2-ой степени и в частности вопрос о решении уравнения Ферма́та (Пелля).

2) определение нескольких неизвестных, данных *двумя* уравнениями. Например, задача Ферма́та, заинтересовавшая также и Лагранжа, в которой требуется найти два числа определяемые уравнениями

$$x + y = U^2$$

$$x^2 + y^2 = V^2$$

Эйлер обобщил эту задачу на случай, когда ищется более двух чисел, определяемых уравнениями:

$$x + y + z + \ldots = \square^2$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + \ldots = \square^2$$

3) определение нескольких неизвестных, определенных *трем* уравнениями, например problema difficillimum — найти прямоугольный треугольник, в котором каждый из катетов, уменьшенный на площадь, есть квадрат. Задача приводится к уравнениям:

$$2xz - xy = u^2,\quad yz - xy = v^2,\quad 4x^2 + y^2 = w^2$$

4) Задачи, приводящиеся к случаю четырех и более уравнений. Например problema Diophanteum singulare: найти два числа, произведение которых делается квадратом, как по прибавлении, так и по вычитании того или другого числа (XLVI 1774).

5) Особую группу задач представляют те задачи, в которых напротив число условий превышало число неизвестных. Сюда относятся задачи о построении магических квадратов; сюда относится также мемуар: problema algebraicum ob affectiones prorsus singulares memorabile (XXX. 1770), где решается интересная как по содержанию так и по методу решения, основанному на теории преобразования координат, задача о нахождении девяти чисел

$$\begin{matrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{matrix}$$

удовлетворяющих 12 условиям:

$$A^2 + D^2 + G^2 = 1 \qquad AB + DE + GH = 0$$
$$B^2 + E^2 + H^2 = 1 \qquad AC + DF + GI = 0$$
$$C^2 + F^2 + I^2 = 1 \qquad BC + EF + HI = 0$$

$$A^2+B^2+C^2=1 \qquad AD+BE+CF=0$$
$$D^2+E^2+F^2=1 \qquad AG+BH+CI=0$$
$$G^2+H^2+I^2=1 \qquad DG+EH+FI=0$$

и две аналогичные задачи о нахождении 16 чисел, удовлетворяющих 22 условиям и 25 чисел, удовлетворяющих 35 условиям. В своем знаменитом мемуаре „О непрерывных дробях" (Сочин. т. I стр. 226) П. Л. Чебышев, доказавши ортогональность знаменателей подходящих дробей, получающихся при разложении в непрерывную дробь функции $\frac{f'(x)\Theta^2(x)}{f(x)}$, указал на то, что задача о нахождении ортогональных чисел была предметом указанного мемуара Эйлера, который является таким образом прототипом работ по теории ортогональных чисел и функций.

Сам Эйлер в введениях к некоторым своим мемуарам иначе классифицирует задачи и эта классификация оправдывается алгебраическими исследованиями XIX столетия. Эйлер выделяет в особую группу те задачи, которые допускают общие формулы, т.-е. задачи, приводящиеся к уравнению $F(x, y)=0$, для которого x и y могут быть выражены рациональными функциями одной переменной t, т.-е. к уравнению, определяющему алгебраическую функцию рода 0. Таково общее уравнение 2-й степени от двух неизвестных. Это уравнение представляется наиболее простым и по классификации Буняковского и Чебышева. Его решению Эйлер посвятил несколько мемуаров (II. 1732, XXII. 1759. XXXIX. 1773, XLI. 1773; также алгебра часть 2 § 6).

Лагранж указал позже в одном из своих замечательных мемуаров по теории чисел на неполноту метода Эйлера. Во первых, говорит Лагранж, Эйлер всегда предполагает, что уже известно одно ре-

шение, и цель его заключается в том, чтобы вывести все решения из этого единственного. Между тем из одного решения можно вывести только те решения, которыя принадлежат к известной группе решений, связанных с данным решением. Второй недостаток метода Эйлера, на который указал Лагранж, заключается в том, что этот метод не дает способа различать целые и дробные значения в формулах, выражающих x и y. Полное решение уравнения дано Лагранжем в 1777 г.

Во вторую группу Эйлер выделял те задачи, которые или дают одно единственное решение или позволяют вывести с помощью некоторого алгорифма из этого решения другие, но не дают общих формул. Примером таких задач является задача о нахождении трех чисел, сумма кубов которых равнялась-бы также кубу. (XIV. 1754).

Наконец в особую группу Эйлер выделял те задачи, которыя, будучи по существу неопределенными, кажутся более чем определенными. Такова задача, которая рассматривается в мемуаре XVIII. (1756): найти три числа так, чтобы, прибавляя каждое из них к произведению двух других, получался квадрат ($xy+z=u^2$, $xz+y=v^2$, $yz+x=w^2$). Эйлер показывает, что можно прибавить еще пять других условий ($xy+x+y$, $xz+x+z$, $yz+y+z$, $xy+xz+yz$, $xy+xz+yz+x+y+z$ должны быть также квадратами) и однако задача не перестает быть неопределенною.

Рассмотрение подобных вопросов по мнению Эйлера составляло предмет „Поризм" Диофанта.

Интерес Эйлера к анализу Диофанта в значительной степени объясняется тою аналогиею, которая существует между методами решения задач неопределенного анализа и задачами неопределенного интегрирования.

Ceterum analysis sublimior tantum debet methodo

Diophanteae, ut nefas videatur eam penitus repudiare (XXX. II. C. A. I p. 450). Подробнее ту-же мысль развивает Эйлер в интересном мемуаре, не вошедшем в Commentationes collectae: „De methodo Diophanteae analoga in Analysi infinitorum" (Novi Comment. Ac. Petr. 1754 (напеч. 1760), где он проводит аналогию между задачею найти целые числа x, y и z так, чтобы $\sqrt{x^2 + y^2} = z$ и задачею о нахождении ректифицируемых алгебраических кривых, т.-е. задачею о нахождении рациональных функций x, y так, чтобы $\int \sqrt{dx^2 + dy^2}$ выражался алгебраической функцией. В введении к этому мемуару Эйлер прилагает свой общий взгляд на анализ Диофанта, который является для него методом избавления от иррациональности (methodus irrationalem tollendi).

Интерес Эйлера к Диофанту виден из того места которое он отвел ему в своей алгебре.*)

В то время как алгебре, т.-е. определенному анализу посвящено 560 стр. в издании 1770, неопределенный анализ занимает 322 стр. и эти страницы чрезвычайно интересны. Лагранж писал о них Д'Аламберту 26 aug. 1770: „Elle (т.-е. вся алгебра) ne contient rien d'interessant qu'un traité sur les questions de Diophante qui est à la verité excellent". Послѣ простых, почти детских примеров (гл. 1) и задач на так называемое Regula Coeci (гл. 2), Эйлер переходит в третьей главе к общему алгебраическому уравнению с двумя неизвестными и рассматривает (гл. 4 и 5) уравнения $a + bx + cx^2 = y^2$ и уравнения $ax^2 + b = y^2$ (гл. 6). Въ 7-ой главе

*) Алгебра появилась сначала в русском переводе в 1768, потом в немецком оригинале под заглавием „Vollständige Anleitung zur Algebra" (1770). В 1774 г. появился французский перевод алгебры с замечательными приложениями Лагранжа. В 1812 г. акад. Висковатов приготовил новое издание первой части алгебры с своими примечаниями, изданное уже после его смерти.

он дает для решения уравнения Фермата $an^2+1=m^2$ не свою методу, данную им в 1765 в мемуаре De usu novi algorithmi, но методу Валлиса. Три следующие главы содержат решение уравнений $a+bx+cx^2+dx^3=y^2$, $a+bx+cx^2+dx^3+ex^4=y^2$, $a+bx+cx^2+dx^3=y^3$. В тринадцатой главе доказывается невозможность решения уравнения $x^4+y^4=z^2$ и в последней 15-ой главе, невозможность решения уравнения $x^3+y^3=z^3$. Эйлер пользуется при этом методою неопределенного спуска.

Вторая часть алгебры Эйлера в французском издании 1774 г. была дополнена замечательными нотами Лагранжа *) и это сочинение весьма способствовало распространению интереса к анализу Диофанта.

Б.) Теория чисел обязана Эйлеру не только доказательством, обобщением и развитием теорем и задач поставленных Ферматом. Обогативши теорию бесконечных строк и произведений многими важными результатами (мы еще упомянем о его роли в учении о гипергеометрической строке, ему же принадлежат основные теоремы в теории функций Г) Эйлер не мог не обратить своего внимания на вопрос о приложении высшего анализа к теории чисел и ему несомненно принадлежат первые работы в области, которая носит теперь название аналитической теории чисел и в XIX столетии, благодаря работам Лежен-Дирихле, Риманна, Кронекера и мн. др. стала одною из наиболее интересных и важных областей чистой математики.

Я могу остановиться только на некоторых наиболее интересных и важных теоремах Эйлера.

Из легко доказываемого соотношения между бесконечным произведением $\Pi_p\ (1:(1-p^s))$, распро-

*) Lagrange. Oeuvres t. 13 p. 181, 191.

страненным на все абсолютно-простые числа p и бесконечною строкою $\Sigma_n \frac{1}{n^s}$, распространенною на всецелые числа n:

$$\Pi_p (1 : (1 - p^s)) = \Sigma_n \frac{1}{n^s},$$

Эйлер выводит (см. Introductio in analysin Infinitorum Caput XV. 1748) доказательство теоремы громадной важности для теории чисел: существования бесконечного множества простых чисел. [Так-как при $s = 1$ бесконечная строка становится расходящейся и сумма ее превосходит всякое сколь угодно большее число, то и произведение не может быть конечным, т. е. состоять из конечного числа множителей; следовательно и число простых чисел не может быть конечным]. На это доказательство Лежен-Дирихле впоследствии указывал как на первый пример приложения анализа к теории чисел, указавший ему путь к доказательству теоремы, что в арифметической прогрессии $mx + r$, где m и r суть числа взаимно-простые, число простых чисел бесконечно велико, а также и к определению числа классов бинарных квадратичных форм. Бесконечная строка $\Sigma \frac{1}{n^s}$, рассматриваемая как функция от s, играет большую роль в исследованиях по теории чисел и до сих пор служит предметом многих исследований.

Другое соотношение между бесконечным произведением и бесконечною строкою

$$\Pi_p (1 - x)^n = \Sigma x^{\frac{3n^2 \pm n}{2}}$$

привело Эйлера к замечательной формуле: $f(N) = f(N-1) + f(N-2) - f(N-5) - f(N-7) + f(N-12) + f(N-15) - f(N-22)...$ (где 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22... суть пятиугольные и обобщенные

пятиугольные числа (выражающей интересное свойство числовой функции $\sigma(N)$ — суммы всех делителей числа N *).

Но в особенности большое значение имеют соотношения между бесконечными строками и бесконечными произведениями для аддитивной теории чисел, т.-е. для решения вопроса о разбиении чисел (partitio numerorum). Прототипом задач этого рода можно считать задачу о гирях, другими словами задачу о том, как взять числа a_1, a_2, a_3,... так чтобы всякое число могло быть представлено под видом суммы (арифметической или алгебраической) этих чисел. Эта задача находится в „Liber abaci" Фибоначчи **). Затем до Эйлера повидимому ***) вопросом о разбиении чисел занимался только Лейбниц. Сохранился среди его рукописей листок от 1674 г., где он замечает, что число 3 допускает 3 разбиения (divulsiones), 4 — 5 разбиений, 5—7 и наконец 6—11 разбиений. Получающиеся при этом абсолютно простые числа могут навести на мысль об общем законе, но уже 7 допускает 15 разбиений; exemplum memorabile fallentis inductionis—приписывает Лейбниц. В 1699 г. он спрашивает Иоганна Бернулли ****): An unquam considerasti numerum discerptionum vel divulsionum numeri dati... videtur mihi ejus determinatio non facilis et tamen digna quae habeatur" *****). Эйлер заинтересовался этим вопросом по инициативе проф. Науде и первые исследования его по этому поводу относятся к 1741 г. и помещены в невошедшем в „Commentationes

*) См. Введение в анализ вып. I.

**) Издание принца Бонкомпаньи Рим 1857 г. с. 297.

***) Bibliotheca mathem. III. 13 p. 352 (заметка Энестрома).

****) D. Mahhke. Leibnitz auf der Suche nach einer allgemeinen Primzahlgleichung. Bibli. math III. 13 p. 37.

*****) Leibnitzens Mathematische Schriften herausg. von Gerhardt Bd III, 2 (Halle. 1856).

collectae“ мемуаре: „Observationes analyticae variae de combinationibus“. В „Introductio in Analysin infmitorum“ вопросу о разбиении чисел посвящена 16-ая глава. В Commentationes collectae первый мемуар, посвященный этому вопросу, относится к 1750 (IX) (см. также мемуары XXVII (1768), XLVIII (1774) и XLIII (1773)).

Ограничимся указанием только двух, трех важнейших результатов найденных Эйлером.

Разложение произведения

$$P(z) = (1 + xz)(1 + x^2z)(1 + x^3z)\ldots$$

в бесконечную строку дает строку

$$\Sigma X_m z^m = \Sigma A_{n,m} x^n z^m$$

в которой коеффициент $A_{n,m}$ есть очевидно число способов, которыми можно составить число n из m *неравныхъ* слагаемых, взятых в ряду чисел 1, 2, 3,... Для определения многочлена $X_m = \Sigma A_{n,m} x^n$ мы можем воспользоваться очевидным равенством: $(1 + xz)\ \rho(xz) = \rho(z)$ т.-е. $(1 + xz)(1 + X_1 xz + X_2 x^2 z^2 + X_3 x^3 z^3 + \ldots) = 1 + X_1 z + X_2 z^2 + X_3 z^3 + \ldots$, откуда легко получается

$$X_m = \frac{x^{\frac{m(m+1)}{1.2}}}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^m)}$$

Отсюда выводится теорема: Положительное целое число n может быть составлено из m неравных слагаемых столькими-же способами, сколькими число $n - \frac{m(m+1)}{2}$ может быть составлено из равных или различных слагаемых из ряда чисел 1,2,... m.

Подобным-же образом рассмотрение произведения $\frac{1}{(1-xz)(1-x^2z)(1-x^3z)(1-x^4z)\ldots}$ дает теорему: положительное целое число n может быть составлено

из m равных или различных слагаемых столькими-же способами, сколькими число n—m может быть составлено из равных или различных слагаемых из ряда чисел 1,2,... m.

Сравнение же этих двух теорем дает легко третью теорему: число $N = n - \frac{m(m+1)}{2}$ может быть столько-же раз составлено из m равных или различных слагаемых, сколько раз число $n - \frac{m(m+1)}{2} = N$ может быть составлено из m различных слагаемых.

В историческом отношении большой интерес представляет письмо Эйлера к Гольдбаху от 17 августа 1750 г. *), в котором Эйлер по поводу теоремы Фермата — всякое число может быть разложено на сумму четырех квадратов—выражает мысль, что наиболее естественный путь к доказательству этой теоремы есть рассмотрение бесконечной строки. „Если-бы мы могли показать, что $(1 - x^1 - x^4 + x^9 + x^{16} - \ldots)^4$ содержит все степени x, то теорема Фермата была-бы доказана". Это предположение Эйлера было подтверждено исследованиями Якоби в теории эллиптических функций. В основном для этой теории сочинении „Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum" (1828). Якоби дает бесконечные строки для выражения периодов k и k' эллиптических интегралов, расположенных по степеням $q = e^{-\pi \frac{k'}{k}}$. По одной из этих строк $\sqrt{\frac{2k}{\pi}} = 1 + 2q^1 + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \ldots$

В другой строке для $\frac{4k^2}{\pi^2} = \left(\frac{2k}{\pi}\right)^4$ находятся действительно все степени переменной q. Но сравнение этих двух строк не только дает доказательство

*) Correspondance vol. I, p. 530.

теоремы Фермата, предсказанное Эйлером; оно дает вместе с тем и число способов, которыми всякое число N может быть разложено на сумму четырех квадратов.

Изучаемые в теории эллиптических функций разложения в бесконечные строки и бесконечные произведения функций „тета" и функций „омега" [функциями омега английский ученый С. Смит предложил называть функции от одного аргумента, получаемые из функций Тета от x и q. придавая x частные значения *)] являются неисчерпаемым источником арифметических теорем, как это прежде всего показал сам Якоби. Якоби, а также вслед за ним Лиувилль показали, что многие из этих теорем могут быть доказаны чисто арифметическим путем. В высшей степени замечательные результаты были получены из теории эллиптических функций (теория модулярного уравнения и теория комплексного умножения) Эрмитом и Кронекером; последний в ряде мемуаров, напечатанных в 1857 — 1863 г., дал знаменитые восемь формул, дающих возможность определить число классов квадратичных бинарных форм отрицательного определителя. Позже в мемуарах „Zur Theorie der elliptischen Functionen", напечатанных в издании Берлинской Академии в конце восьмидесятых и начале девяностых годов, Кронекер снова возвратился к этим вопросам для того чтобы доказать и обобщить найденные ранее теоремы. Арифметические приложения теорий эллиптических функций составляют одну из наиболее интересных областей современной математики, в которой исследования далеко еще е законченны **). Тем более

*) Смотри его крайне интересный мемуар: Memoir on the Theta and omega functions (Math. pap. v. II p. 415—623).

**) Желающих подробнее познакомиться с этою областью отсылаем к „Report on the theory of numbers part VI". St.. Smith'a (Works. v. I. p. 289, 365) и k. сочинению П. С. Нази-

важно отметить, что первый результат полученный в этой области принадлежит Эйлеру.

Выше упомянутое равенство, найденное Эйлером в 1741 г.

$$\prod (1 - x^n) = \sum (-1)^m x^{\frac{3m^2 + m}{2}}$$

есть действительно одна из теорем теории функций омега. Эйлер показал вместе с тем, что из легко доказываемого равенства $\prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + x^n) \cdot \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty} (1 - x^\nu) = 1$ (n принимает все целые значения 1, 2, 3, 4,... тогда как ν принимает только нечетные) вытекает следующая интересная теорема теории разбиения чисел: каждое целое число может быть столько-же раз составлено из *различных* слагаемых, сколько и из *равных* или *различных нечетных* слагаемых.

Теория разбиения чисел, созданная Эйлером, сводится к вопросу о решении неопределенного уравнения $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = N$ и приводится к изучению производящей функции

$$\frac{1}{(1 - t^{a_1})(1 - t^{a_2}) \ldots (1 - t^{a_n})} \qquad (T)$$

и к нахождению в ее разложении в строку коэффициента члена t^N. Она далеко не закончена, хотя и была в XIX столетии предметом изучения многих математиков преимущественно английских: Кэли, Сильвестра, Макмагона и др. Один из наиболее важных результатов, полученных Кэли, состоит в утверждении, что коэффициент члена t^N в разложении функции (T) может быть всегда представлен под видом $c_0(N) + c_1(N) N + c_2(N) N^2 + \ldots + c_{n-1}(N) N^{n-1}$,

мова. О приложениях теории эллиптических функций к теории чисел. Москва. 1885. См. также Bachmann. Analytische Zahlentheorie. Leipz. 1894.

где c_0, c_1,.. c_{n-1} суть числовые периодические функции от N. Желающих ближе познакомиться с теориею разбиения мы отсылаем к сочинениям Bachmann'a: Additive Zahlentheorie. Leipz. 1901 и Netto. Lehrbuch der Kombinatorik. Leipz. 1901.

Наравне с приложением теории бесконечных строк и произведений Эйлер занимался и приложением теории непрерывных дробей, которой развитие обязано ему очень многими важными теоремами и формулами *). Эту теорию он приложил с одной стороны к решению неопределенного уравнения 1-й степени, с другой стороны к решению того уравнения, которому он дал название Пеллевского.

Наше, по необходимости сжатое, изложение результатов и методов Эйлера достаточно однако думается для того, чтобы выяснить значение Эйлера в истории теории чисел и побудить интересующихся этою наукою к изучению „Commentationes collectae". Но изучение сочинений Эйлера имеет и громадное педагогическое значение. „Lisez, lisez Euler— c'est notre maître à tous" говорил Лаплас и настойчиво внушал ту же мысль своим слушателям в С. Петербургском университете А. Н. Коркин. В то время как многие великие математики и во главе их Ньютон и Гаусс представляют результат своих работ в вполне законченном виде, поражающем начинающего читателя, часто даже скрывают путь которым они шли, Эйлер напротив, много раз возвращаясь к одному и тому же вопросу и постепенно отделывая его решение, вводит читателя в лабораторию математической мысли. С другой стороны необыкновенное богатство, остроумие и изящество преобразований ставит Эйлера на первое место в ряду аналитиков—вычислителей.

*) См. Perron. Die Lehre von den Kettenbrüchen. 1913.

Изучение арифметических работ Эйлера облегчено изданием „Commentationes Arithmeticae". По инициативе международных математических конгрессов Цюрихского (1897), 3-го Гейдельбергского (1904) и 4-го Римского (1908) было предпринято издание всех его сочинений. Война задержала завершение грандиозного дела, но оно не может не быть рано или поздно доведено до конца. Когда оно будет закончено, Эйлер встанет во всю величину своего математического гения и математики XX и многих следующих столетий будут находить изучение Эйлера столь же поучительным, как его находили математики XIX-го века.

VIII.

Лагранж и Лежандр.

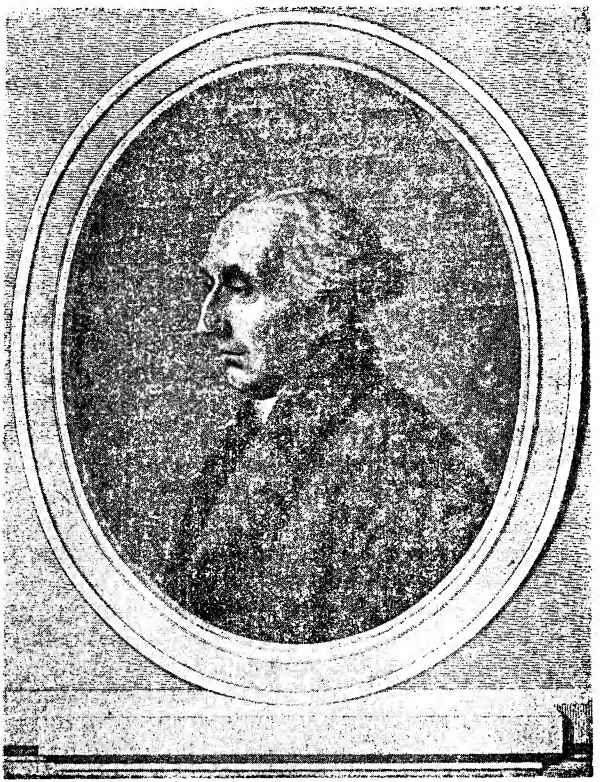
В блестящем докладе, прочитанном на Парижском международном конгрессе 1900 г. покойный Пуанкаре провел интересную параллель между математиками двух типов, противоставляя Вейерштраса и С. В. Ковалевскую, как представителей математиков-логиков, Риманну и Клейну, представителям математиков, главная особенность и сила которых заключается в развитии интуиции. Другой французский ученый Дюгем в своем сочинении: „Théories de la physique" посвятил интересную главу различию двух типов ума: ума глубокого и ума широкого (esprit profond et esprit ample); ярким представителем широких умов представляется Дюгему Наполеон. Нетрудно найти в истории математики многие примеры этого различия. Сравните Пуанкаре и Коши, работы которых касаются всех областей чистой и прикладной математики и проливают яркий свет на самые разнообразные и трудные вопросы, с Лобачевским и Георгом Кантором—создателями неевклидовой геометрии и теории множеств, сосредоточившими всю

силу своего глубокого ума на своих гениальных созданиях.

Можно по моему мнению провести и иное различие между крупнейшими математиками трех последних столетий. Одним—наша наука обязана преимущественно нахождением путем гениальной интуиции и индукции новых математических фактов, открытием новых методов доказательства и исследования, расширением своих границ, созданием новых областей науки. Другим, напротив, наука главным образом обязана тем, что всюду, куда ни проникал их математический гений, они искали и находили общие идеи и основные начала, строили, исходя из небольшого числа таких начал, гениальные дедуктивные системы и сближали области науки, повидимому не имеющие ничего общего, но при более глубоком проникновении в их сущность основанные на однех и тех же общих идеях. Эйлер с одной стороны, Лагранж с другой являются яркими представителями этих двух математических типов.

Мы знаем давно, что Эйлер положил основание и теории степенных вычетов и теории эллиптических интегралов и теории движения твердого тела и вариационному исчислению и наконец анализу положения (Analysis situs). За последние десятилетия внимательное изучение его работ открыло новые места его сочинений, показывавшие глубину и разнообразие его мыслей (изучение роста функций, теория функций наименее уклоняющихся от нуля, основные уравнения в частых производных теории функций от комплексной переменной, начатки теории гипергеометрических уравнений, наконец (см. выше), закон взаимности двух простых чисел). Мы старались показать в предыдущей главе, как Эйлер подобно натуралисту настойчиво собирал и подмечал математические факты, искал их в самых разнообразных направлениях, одинаково интересуясь и

вопросом о характере числа и построением магических квадратов и движением коня по шахматной доске.



Жозеф-Луи Лагранж (1736—1813).

Иной характер носят все работы Лагранжа (1736—1813) в теории чисел. Он занимался ею сравнительно недолго и немного и не обогатил ее боль-

шим количеством новых теорем, не открыл в ней новых областей исследования, но он внес в нее характерное для него стремление к отысканию общих начал. Гениальному автору Аналитической Механики, ученому, который первый открыл истинную природу теории решения алгебраических уравнений, сведя ее на изучение инвариантов групп перемещений букв и проложил таким образом путь к исследованиям Галуа, Жордана и Кронекера, теория чисел обязана несомненно основанием теории бинарных квадратичных форм: $ax^2 + bxy + cy^2$, явившейся прототипом общей арифметической теории форм. В то время как Эйлер рассматривал почти исключительно выражения вида $mx^2 + ny^2$ *), Лагранж рассматривает в важнейшем из своих мемуаров по теории чисел, изучение которого и теперь представления необыкновенно плодотворным, Recherches d'Arithmétique (Oeuvres t. III p. 691—795), вопрос о делителях чисел, которые могут быть представлены под видом $Bt^2 + Ctu + Du^2$ и, как мы увидим дальше, вводит в эту теорию основные и характеристические для всей теории чисел идеи о классе и представителе класса (приведенная форма).

Лагранж занимался теориею чисел сравнительно недолго (1768—1777), занялся ею, как он пишет к Д'Аламберту „pour diversifier un peu mes études" и, как видно из того-же письма, заинтересовался внесением общих начал в ту часть анализа Диофанта, которая занимается теориею квадратных количеств (des quantités carreés) т. е. решением

*) Только в мемуарах, в которых Эйлер доказывал, что сумма двух кубов не может быть кубом (см. напр. XXI 1759), он поставил в тесную связь формы $m^2 + 3n^2$ и $m^2 + mn + n^2$, принадлежащие, употребляя терминологию Гаусса, к одному классу форм определителя —3.

неопределенных уравнений 2-ой степени *) Он скоро заметил, что решение общего неопределенного уравнения 2-ой степени $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ сводится к решению уравнения Ферма́та, которое он, подобно Эйлеру, называл уравнением Пелля и которое он считал ключом решения общего уравнения (la clef de la resolution). **) Этому уравнению посвящена его первая работа, вполне закончившая вопрос и основанная на теории непрерывных дробей, которую он приложил, как известно, также к решению определенных уравнений в сочинении „Résolution des equations numeriques".

Лагранж доказал, что уравнение $t^2 - Au^2 = 1$ при A не полном квадрате всегда имеет решение.

В мемуарах, „Sur la solution des problèmes indeterminès du second degre" и „Nouvelle mèthode pour resoudre les problemes indèterminès en nombres entiers". (Оба мемуара (1769—1770) находятся во 2-м томе полного собрания сочинений, а также и в приложениях к алгебре Эйлера (1774), он рассматривает снова и решает вопрос об общем уравнении.

Важнейший, как мы сказали, из его мемуаров: Recherches d'Arithmétique (1773 — 1775) посвящен уравнению частного вида

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = N$$

т. е. вопросу о числах, которые могут быть представлены под видом $Ax^2 + Bxy + Cy^2$ и о делителях этих чисел. По основной теореме (théoréme III) этого мемуара, рассмотрение формы $Bt^2 + Ctu + Du^2$, (где t и u суть числа взаимно простые и для которой выражение $4BD - C^2 = \Delta$ (это выражение со вре-

*) Oeuvres. Vol. XIII. Correspondance.

**) Solution d'un problème d'arithmétique (1768—Oeuvres v. I p. 671).

мен Гаусса носит название определителя формы) может быть заменено рассмотрением формы $Py^2 + Qyz + Rz^2$ того-же определителя ($4PR - Q^2 = \Delta$), но в которой абсолютная величина коэффициента Q не больше и абсолютной величины P и абсолютной величины R. Эта равнозначность по отношению к вопросу о представлении чисел (эквивалентность—Гаусс) является следствием того, что первая форма может быть преобразована во вторую, некоторым специальным линейным преобразованием.

Следствием этой теоремы является метод для приведения форм одного и того-же определителя к наименьшему числу т. к. из основной теоремы легко выводится, что в случае $\Delta > 0$, абсолютная величина Q должно быть меньше $\sqrt{\frac{\Delta}{3}}$, а в случае $\Delta < 0$ меньше $\sqrt{\frac{\Delta}{5}}$. В том и другом случае т. к. Q должно быть целым числом, то оно может принимать только конечное число различных значений. Так как $4PR - Q^2 = \Delta$ и так как P и R должны быть также целыми числами, то и они допускают только конечное число различных значений. Таким образом получается конечное число выражений вида $Py^2 + Qyz + Rz^2$, могущих быть делителями.

В случае $\Delta > 0$ без труда доказывается, что эти выражения различны т. е. могут представлять только различные числа. Случай $\Delta < 0$ представляет большую трудность, но в преодолении этой трудности особенно проявляется математический гений Лагранжа. Его метод приведения по существу совпадает с методою данною позже Гауссом.

Вторая часть мемуара посвящена определению форм линейных делителей. Здесь решение Ла-

*) См. Чебышев. Теория сравнений стр. 151.

гранжа не полно и этот недостаток объясняется тем, что ему был неизвестен закон взаимности простых чисел. Тем не менее весь мемуар Лагранжа является одним из важнейших этапов в развитии теории чисел. В нем implicite содержалось уже понятие о классе и представителе класса и таким образом был заложен тот фундамент, на котором через четверть века Гаусс построил современную арифметическую теорию форм.

Место не позволяет мне столь же подробно познакомить с содержанием других мемуаров Лагранжа, посвященных теории чисел, и я ограничусь только перечислением главных результатов в них заключающихся. 1) В мемуаре: Nouvelle methode pour rèsoudre les problémes indeterminés en nombres entiers (1768. Oeuv. vol II) он дает теорему, определяющую высший предел числа решений сравнения $f(x) \equiv 0$ (мод m). 2) В мемуаре: „Demonstration d'un théorème nouveau concernant les nombres premiers" (1771. Oeuv. v. III) он дает два доказательства знаменитой теоремы Вильсона-Варинга, опубликованной последним в 1770 г. в сочинении Meditationes algebraicae (Cambridge) 3). В мемуаре Démonstration d'un theóreme d'Arithmétique (1770 ibidem) доказывается теорема Баше, по которой каждое число есть сумма четырех квадратов. 4) Последний из его мемуаров (Sur quelques problèmes de l'analyse de Diophante" (1777. Oeuv. IV) посвящен задаче Фермата, интересовавшей также и Эйлера: найти наименьший прямоугольный треугольник, в котором как гипотенуза так и сумма катетов есть квадрат. Употребляя метод неопределенного спуска, Лагранж доказывает верность утверждения Фермата, что наименьший прямоугольный треугольник имет катетами 1061652293520 и 4565486027761, тогда как Эйлер доказал только, что эти числа удовлетворяют задаче. Лагранж ви-

димо очень интересовался задачами анализа Диофанта. В „приложениях к алгебре Эйлера" несколько параграфов посвящено задачам этого типа, между прочим (§ VI) двойным и тройным равенствам. Люка *) сообщает, что Лагранж имел намерение издать арифметику Диофанта с примечаниями, поясняющими замечания Фермата; работа эта не была им закончена, но рукопись четырех первых глав сохраняется в библиотеке Института. Нам неизвестно, интересовался ли кто нибудь после Люка этою рукописью.

„Приложения к алгебре Эйлера", сделанных Лагранжем и изданныя в Лионе в 1774 (второе издание в Париже 1807 г.) представляют громадный научный интерес. Каждый из 9 параграфов этих приложений заслуживает и до сих пор внимательного изучения. § 1 посвящен теории непрерывных дробей и ея приложениям к приближенному вычислению. В § 2 излагаются методы для определения целых чисел, дающих minima неопределенных формул с двумя неизвестными. Здесь Лагранж доказывает одну из самых замечательных теорем учения о числах. Легко видеть, что периодическая непрерывная дробь удовлетворяет уравнению 2-ой степени. Теорема Лагранжа говорит, что всякий корень целочисленного уравнения 2 степени (квадратичная иррациональность или как мы будем говорить далее число квадратичного тела $|\sqrt{m})$ при разложении в правильную непрерывную дробь дает дробь периодическую **). Позже теорема

*) Recherches sur l'analyse indeterminée et l'arithmetique de Diophante. Bulletin de la Société d'émulation d'Alliers. 1873.

**) Эта теорема раньше была доказана им в мемуаре: Additions a'la théorie de la résolution des equations numeriques" (Oeuvres vol. II. 1768) Правильною непрерывною дробью называются дроби, в которых все четные числители равны 1, а частные знаменатели суть целые положительные числа.

Лагранжа была доказана Лиувиллем как частный случай его исследований о характере приближения рациональных чисел к корню алгебраического уравнения. Эти замечательные исследования дали первое доказательство существования трансцедентных чисел. Эрмит и Линдеман доказали трансцедентность чисел e и π иным путем, изучая специальные свойства этих чисел, вытекающие из их аналитического определения. Наконец третий путь, превосходящий оба эти пути, есть путь Г. Кантора, основанный на теории множеств (см. об этих вопросах мое „Введение в анализ" вып. II и „Новые идеи в математике", вып. № 6, посвященный работам Кантора). Арифметический характер квадратных иррациональностей, данный теоремою Лагранжа, послужил толчком к целому ряду замечательных исследований, имевших целью найти арифметический характер других иррациональностей, например кубических. Этими вопросами занимались Якоби, Эрмит, Минковский, Вороной *).

Теория относительных минимумов неопределенных выражений, начало которой было положено Лагранжем (впрочем и Эйлер уже в одном из своих мемуаров рассматривал подобные вопросы) была также предметом многих работ, из которых наиболее замечательные принадлежат Эрмиту, Минковскому, Гурвицу и нашим русским математикам: Чебышеву, Коркину и Золотареву и А. А. Маркову.

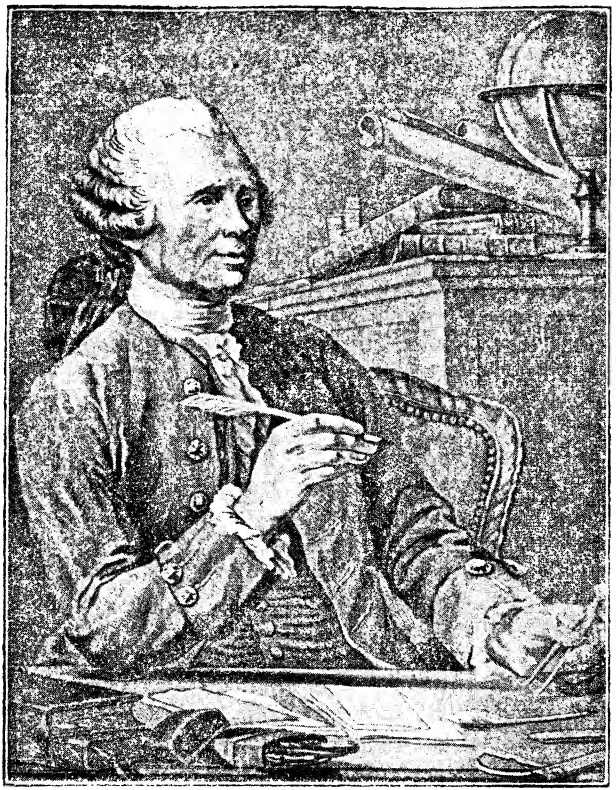
В § 3—8 Лагранж излагает результаты своих исследований относительно решения как общего неопределенного уравнения 2-ой степени так и уравнения Фермата. Наконец § 9, посвященный

*) Особый класс трансцедентных чисел, существование которых вытекает из исследований Лиувилля, был подробно исследован Малье (Introduction à la théorie des nombres transcendants 1906), который называет эти числа Лиувиллевскими.

теории подобных функций, тесным образом связан с замечательной теориею композиции форм, данной Гауссом и общею теориею разложимых форм. Мы будем говорить подробнее об этих вопросах далее.

Приложения Лагранжа к алгебре Эйлера, выдержавшей много изданий, конечно много способствовали облегчению знакомства с вопросами теории чисел и возбуждению интереса к ним. Не меньшую роль сыграл первый трактат по теории чисел написанный Лежандром (1752—1833). К деятельности Лежандра в области теории чисел мы теперь и переходим. То что он дал теории чисел может быть и меньше чем то, что он дал теории эллиптических интегралов, но во всяком случаи очень значительно. Достаточно указать на громадное значение в теории квадратичных вычетов введенного им и носящаго его имя, символа и на изящную формулировку с помощью этого символа закона взаимности двух простых чисел. Мы отметили выше неполноту исследования Лагранжа о линейных делителях квадратичных форм, обясняя это тем, что Лагранжу не было известно соотношение, существующее между квадратичными характерами двух простых чисел т. е. закон взаимности. Это замечательное соотношение, развитие и обобщение которого привело, как мы увидим в главе XI, Гаусса и Куммера, и в последнее время Гильберта к глубоким исследованиям и новым плодотворным обобщениям, было отчетливо формулировано в 1785 г. в мемуаре: „Recherches d'analyse indéterminée" представленном в Французскую Академию Лежандром. Мемуар содержит вместе с тем и первую попытку доказательства закона взаимности, но попытку не вполне удавшуюся. Подробная критика доказательства Лежандра, основанного между прочим на не доказанном допущении, что всякая

арифметическая прогрессия mx + r, где m и r суть числа взаимно-простыя заключает в себе простыя числа, дана Гауссом в его Disquisitiones (§ 296



Адриан Лежандр (1752—1833).

и 297) Мемуар 1785 г, содержит в себе и другия исследования Лежандра, напр. о решении неопреде-

ленных уравнений: $Ay = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots\ldots$ т. е. сравнений высших степеней, о числах разложимых на сумму трех квадратов, о критериях решимости в целых числах неопределеннаго уравнения $ax^2 + by^2 = cz^2$, где a, b, c суть положительныя, взаимно простыя и не имеющие квадратных множителей целые числа (уравнение решается, если можно найти три целыя числа λ, μ, ν так, что $\frac{a\lambda^2}{c} + b$, $c\mu^2 - b$, $c\nu^2 - a$ суть целыя числа).

Лежандр занимает почетное место в истории теории чисел и как автор первого сочинения, преследовавшего цель изложить результаты полученные в этой науке. В первом издании, появившемся в 1798 г. (an VI de la République) под именем: Essai sur la théorie des nombres Лежандр излагает важнейшие результаты, полученые Эйлером, Лагранжем и им самим. Сочинение разделяется на четыре части. Первая начинается с подробного и тяжело написанного изложения теории непрерывных дробей и содержит приложение этой теории к решению неопределимых уравнений. В этой части в разложении корня квадратнаго из целого числа нельзя не отметить найденный Лежандром закон периода неполных частных. Вторая часть посвящена общим свойствам чисел и содержит между прочим несколько видоизмененное доказательство закона *взаимности* и его приложение к определению делителей чисел. Третья часть содержит общую теорию разложения числа на сумму трех квадратов; частный случай этой теории дает доказательство теорем Фермата, по которой всякое число может быть представлено под видом суммы трех треугольных чисел. Важны также найденные путем индукции теоремы, показывающие зависимость числа решений уравнения $x^2 + y^2 + z^2 = N$ от числа клас-

сов и форм с определителем K. Теоремы Лежандра были доказаны и обобщен Гауссом. (Д. А. §. 288—293). Неточность доказательств Лежандра зависела опять таки от того же недоказанного допущения относительно арифметических прогрессий. Позже формула для числа разложений на сумму трех квадратов было получена Кронекером как частный результат его знаменитых восьми формул, служащих для определения числа классов бинарных форм с отрицаемым определителем *). Наконец четвертая часть посвящена разнообразным исследованиям (решение сравнения $x^n \equiv b \pmod a$, докозательство теории, что сумма двух биквадратов не может быть квадратом). Там Лежандр уже излагает начало своих изледований по вопросу о числе прошлых чисел Ч (a) в ряду натуральных чисел 1, 2, 3, 4, . . . a. Его знаменитая эмпирическая формула для числа Ч (a): $Ч\ (a) = \frac{a}{\log a - 1{,}08366}$ дана только во втором издании „Essai" (Paris 1808). Как в это издание, так и в дополнения, напечатанные в 1816 и 1825 г., Лежандр ввел многия интересные исследования как, например, свое докозательство последней теоремы Фермата для случая показателя 5, так и найденные другими учеными (например доказательство найденное Коши общей теоремы Фермата о многоугольных числах, теорема Софии Жермен). Наконец в 1830 г. он дал окончательное издание своего сочинения в двух томах под заглавием Théorie des nombres **).

Это издание, появившееся через тридцать лет после Disqusitiones Гаусса, содержит в себе многие

*) См. Steph. Smith. § 130 и Назимов: выше указ. сочинение. Глава III.

**) Сочинение это было переиздано без всяких изменений в 1900 г. Немецкий перевод Maser'a напечатано в 1893 г. в Лейпциге: Zaheentheorie von Adrian Marie Legendre (издание Teubner'a). Русский перевод сочинения не существует.

результаты, почерпнутые из этого сочинения в особенности из теории деления круга. Но наиболее важные, наиболеее плодотворные идеи и открытия Гаусса были не поняты и не оценены Лежандром. В отличие от строгой систематичности Disqusitiones, сочинение Лежандра и в последнем издании представляет, как и в первом, несвязанный никакою общею идею, безпорядочно расположенный конгломерат разнообразных вопросов, касающихся, а иногда и не касающихся теории целых чисел. Этот характер сочинения Лежандра впрочем отчасти объясняется и состоянием науки, которой оно посвящено. Только в 1801 г. с появлением Disquisitiones высшая Арифметика получила строгое обоснование, точно очертила свои границы, связала себя с другими математическими дисциплинами, доказала свое громадное для них значение и таким образом приобрела право стать Царицею Математики, как ее назвал безсмертный автор „Disquisitiones".

IX.

Гаусс.

Когда Гаусс (1777—1855) пятнадцатилетним юношею (в 1792 или 1793 г.), как он пишет в письме к Энке *) был привлечен „чарующею прелестью" (zaubernder Reiz) теории чисел и таинственностью ея задач, и стал заниматься труднейшею из этих задач — вопросом о частоте абсолютно-простых чисел в ряду натуральных чисел—он был не знаком с литературою науки, которой он предался с юношеским жаром. Только осенью 1795 г. по переезде в Геттинген он быстро ознакомился с работами Эйлера, Лагранжа и Лежандра.

*) Werke ibd II к. p 444.

Сохранившийся дневник *) в котором Гаусс отмечает важнейшие этапы своей работы, дает воз-

Гаусс (1777—1855).

можность судить о ея ходе, Еще в Марте 1795 г. он индуктивным путем находит закон взаимности и

*) Festschrift к юбилею Геттингенского Общества. 1901.

в течение целого года мучается над его доказательством (per mtegrum annum me torsit), пока не находит его 8 Апреля 1796 г. За несколько дней перед этим в дневнике встречается другая отметка „Circulum in 17 partes divisi bilem esse geometrice detexi-mus 1796 Mart 30" и в письме к своему другу Вольфгангу Болэю девятнадцатилетний юноша справедливо считает свое открытие достойным увековечить его память. К концу 1796 г. рукопись половины его сочинения уже готова и следующие годы посвящены работам в теории квадратичных форм и теории деления круга. Летом 1801 Disquisitiones arithmeticae выходят из печати, и эта книга двадцатичетырехлетняго юноши является до сих пор классическим трудом по теории чисел и, по словам Кронекера, еще в течение столетий будет служить неисчерпаемым источником для арифметических исследований.

Disquisitiones arithmeticae могут быть расделены на три части.

Первая часть (отделы (Sectiones) 1—4) содержит начала современной теории чисел или точнее говоря той ея части, которую мы назвали выше мультипликативною, так как она рассматривает главным образом представление чисел под видом произведения простейших множителей (абсолютно—простых чисел), разделение чисел друг на друга, свойства получающихся при этом остатков и т. п. Первый отдел говорит о сравнении (congruentia) вообще и о введении этого понятия, которое конечно встречается раньше и у Ферната и у Эйлера, но которое не было ранее ни точно формулировано, ни методически употребляемо, составляет первую крупную заслугу Гаусса. При этом Гаусс вводит для сравнения в высшей степени удобное обозначение: $a \equiv b \pmod m$, при котором аналогия с уравнениями выступает весьма ярко. Гаусс в одном месте своих сочинений спроведливо говорит, что математика должна

черпать свою силу из понятий, но не из обозначений (ex notionibus non ex notationibus); тем не менее математика многим обязана удачному выбору символов и обозначений и Гауссовский символ для сравнения представляет один из наилучших примеров.

Второй отдел вместе с основными теоремами теории делимости чисел дает решение сравнения 1-ой степени, т. е. решение неопределенного уравнения $ax + by = c$ и решение аналогичной задачи для системы линейных сравнений. Этот последний вопрос расмотрен однако несколько бегло и только Stephen Smith и за ним Стиелтиес изучили этот вопрос с необходимою полнотою *). Нахождение числа, дающаго данные остатки при делении на данные модули, приводит Гаусса к новому выводу формулы для Эйлеровой числовой функции $\varphi(m)$ — числа чисел меньших m и взаимно простых с m. Отдел заканчивается доказательством теоремы, по которой сравнение $f(x) \equiv 0 \pmod p$ (p есть простое число) не может иметь больше m решений, если m есть степень полинома $f(x)$; доказательство Гаусса не отличается существенно от доказательства данного Лагранжем (см. выше). Теорема имеет основное значение для теории сравнений высших степеней, которой Гаусс хотел посветить особый восьмой отдел Disquisitiones. К этой-же теорий относится помещенная в § 42 теорема: „Если целая целочисленная **) функция есть произведение двух целых функций с рациональными коеффициентами, то эти коеффициенты должны быть целыя числа".

*) *S. Smith*, On Systeme of linear mdeterminate equations and congruences. Mathem. papers, vol I p. 368-410. Stieltjes. Essai sur la theorie des nombres. Paris 1895. См. также Bachmann. Arithmetik der quadratischen Formen. Leips. 1898.

**) Целочисленною функциею мы будем называть функцию, все коеффициенты которой суть числа целыя.

Значение этой теоремы для созданной Кронекером арифметики целых функции и для теории алгебраических числовых тел (см. в особенности. Bachmann. Allgmeeine Aritmhetik der Zahlkörper N. 1905) выясняется в настоящее время все более.

В третьем отделе (§ 45—§ 93), посвященном теории степенных вычетов, Гаусс дает прежде всего теорему, по которой если a^t есть наименьшая степень при делении на модуль p (простое число), дающая остаток 1, то t (Гаусс называет t показателем, к которому принадлежит a по модулю p) есть делитель числа p—1. Доказательство этой теоремы, простыми следствием которой является теорема Фермата, почти совпадает с доказательством Эйлера, основанным на теории степенных вычетов, и подобно ему является частым случаем доказательств одной из основных теорем абстрактной теории конечных групп. Новым и важным результатом является определение числа несравнимых между собою чисел, принадлежащих к данному показателю, основанное на свойствах Эйлеровской числовой функции $\varphi(m)$, и вытекающее отсюда доказательство существования первообразного корня. Эйлер не дал этого доказательства и поэтому многие его выводы были лишены строгого обоснования. Доказавши существование первообразного корня для всякого простого числа, Гаусс получил возможность найти для всякого числа, на p не делящегося, степень первообразного корня g, сравнимую с этим числом по модулю p притом так, что показатель степени будет одно из чисел: 0, 1, 2,... p — 2. Показатель этот, или индекс, как его предложил называть Гаусс, имеет свойства аналогичные со свойствами логарифма и на основании этих свойств легко выводится критериум возможности решения сравнения $ax^n = b$ (мод p).

Только частный случай этого критериума для сравнения $x^2 \equiv b$ (мод p) был известен Эйлеру. Подобно тому как в отделе 2-м Гаусс ввел для целого числа удовлетворяющего сравнению $ax \equiv b$ (мод p) обозначение $\frac{a}{b}$(мод p), он обозначает целое число, удовлетворяющее сравнению $x^n \equiv A$ (мод p) символом $\sqrt[n]{A}$ (мод p). В конце отдела Гаусс доказывает, что произведение чисел периода числа a (периодом Гаусс называет числа 1, a,.. a^{d-1} несравнимыя между собою) сравнимо по модулюм p с $-(-1)^d$, откуда получает, как частный случай теорему Вильсон-Варинга. Гаусс дает и другое обобщение этой теоремы для сложного модуля, указывая путь доказательства этого обобщения (доказательство было дано позже Бреннеке и Шерингом).

В четвертом отделе Гаусс излагает теорию квадратичных вычетов. Теория рассматривает два основные вопроса, смотря по тому предполагается ли данным в двучленном сравнении

$$x^2 \equiv a \text{ (мод } m)$$

модуль m или вычет a. В первом случае требуется найти для каких чисел a возможно решение сравнения. Вопрос легко приводится к случаю, когда модуль есть степень простого числа и затем к сравнению $x^2 \equiv a$ (мод p), где p есть простое нечетное число и a не делится на p. Смотря по тому возможно-ли решить сравнение или нет, a называется квадратичными вычетном или не вычетом числа p (residuum или non residuum) и обозначает: a Rp или a Np. Существует одинаковое число несравнимых между собою чисел того и другого рода.

Гораздо более трудностей представляет вторая задача, которую ставит Гаусс в § 107: для данного

числа a найти все числа, для которых a есть вычет или не вычет. Ответ на этот вопрос дан Эйлером для значений a=1 и a=3, Лагранжем для a=2, 5, 7, и Гаусс начинает с доказательства соответствующих теорем (§108—124). Гаусс переходит затем к общему вопросу о квадратичном характере одного нечетного простого числа по отношению к другому и к доказательству решающей этот вопрос основной теоремы (theorema fundamentale). Самую теорему он формулирует (§ 131) следующим образом: „Смотря потому есть-ли p простое число вида $4n+1$ или $4n-1$, $+p$ или $-p$ есть вычет или невычет всякого простого числа, которое, будучи взято положительным, есть вычет или невычет числа p." Доказательство, которое дает Гаусс, безупречно; оно основывается на самом определении квадратичных вычетов, но чрезвычайно сложно даже в той упрощенной форме, котарая после была дана ему Леженом-Дирихле *). Это упрощение в значительной степени зависит от того, что Дирихле при доказательстве пользуется символом Лежандра, которого Гаусс, не считал нужным вводить хотя он был ему известен, т. к. фигурировал уже в первом издании „Essai sur la théorie des nombres" (1798). Закон взаимности, обобщенный Гауссом (§ 133) (позже Якоби придал этому обобщению более изящную форму введением своего символа) дал Гауссу возможность в последних параграфах отдела (§ 147—150) определить как квадратичный характер произвольного числа по отношению к взаимно-простому с ним нечетному модулю, так и линейныя формы делителей и неделителей x^2-a т.-е. тех простых чисел, для которых a есть квадратичный вычет или невычет. Такова первая часть Disquisitiones. Все изложенное

*) Ueber den ersten der von Gauss gegebenen Beweise... Werke Bd II. Стр. 121).

в ней было в главном найдено Гауссом самостоятельно прежде чем он познакомился с литературою. Изучение работ Лагранжа и Лежандра обратило его внимание на новую область исследований—теорию квадратичных форм. Этой теории посвящена вторая центральная часть сочинения (пятый отдел) (§ 153—§ 307).

В § 222 Гаусс сам различает в этом отделе две части: первую (§ 153—§ 221), в которой многое рассматривалось и его предшественниками и вторую (§ 223—307), которая вся целиком принадлежит ему и для которой первая часть служит только вступлением.

Но и первая часть представляет в отличие от мемуаров Эйлера, Лагранжа и Лежандра строго систематическое построение и в нее внесено много новых плодотворных точек зрения и понятий. Последовательное проведение термина „квадратичная форма" (forma secundi gradus) для целой однородной функции 2-ой степени с двумя или более неопределенными величинами принадлежит Гауссу; Лагранж и Лежандр называли такия выражения expressions или formules и только иногда употребляют выражение forme lineaire forme, quadratique. В отличие от Лежандра, Гаусс рассматривает квадратичную форму под видом $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ т.-е. всегда с четным средним коэффициентом и сокращенно обозначает ее (a, b, c,).

Гаусс строит свою теорию на двух основных алгебраических свойствах квадратичных форм. Одно из них есть тожество:

$$f(x,y) \cdot f(x',y') = [(ax + by)x' + (bx - cy)y']^2 - D(xy' - x'y)^2. \quad (1)$$

где D означает выражение $b^2 - ac$ и, как основное число теории, называется определителем формы; от его знака существенно зависят свойства формы,

и поэтому формы распадаются на два вида: формы положительного и формы отрицательного определителя; из тожества (1) вытекает условие, необходимое для того, чтобы число n могло быть представлено формою (a, b, c) *собственно* т.-е. при взаимно простых числах x и y; условие это состоит в том, что D должно быть квадратичным вычетом числа n. Из того же тожества вытекает связь между собственными представлением числа n и решениями сравнения $Z^2 \equiv D \pmod{n}$: каждое представление „принадлежит" определенному решению сравнения. Второе основное свойство есть преобразование квадратичной формы $ax^2 + 2bxy + cy^2$ посредством линейной целочисленной подстановки

$$x = \alpha x' + \beta y', \quad y = \gamma x' + \delta y'$$

в другую форму $a^1x^{1\,2} + 2b^1x^1y^1 + c^1y^{1\,2}$, которой определитель $D^1 = D(\alpha\delta - \beta\gamma)^2$ и которая называется *содержащеюся* в первой; если определитель подстановки *) $\alpha\delta - \beta\gamma = \mp 1$, то формы называются эквивалентными. Большое значение имеет введенное впервые Гауссом различение собственной и несобственной эквивалентности в зависимости от знака модуля ∓ 1. Необходимость этого различения, важная для теории бинарных форм, еще более выясняется в теории тернарных форм. В главе о связи теории чисел и геометрии мы увидим, что это различие соответствует различию между совместимостью и симметриею. Гаусс, интересовавшийся уже тогда кристаллографиею, не мог не обратить на этот вопрос особого внимания. Рассмотревши в § 153—170 вопросы общие для форм с положительным и отрицательным определителем, Гаусс излагает затем отдельно теорию приведения форм с отрицательным опре-

*) Такую подстановку (преобразование) мы будем называть унимодулярною.

делителем (§ 171—182), форм с положительным неквадратичным определителем (§ 183—205) и наконец теорию форм с определителем h^2 (§ 201—214) и с определителем 0 (§ 215). Первая часть пятого отдела заканчивается сжатым, но исчерпывающим решением вопроса об общем решении с помощью целых чисел всех неопределенных уравнений 2-й степени (§ 216—§ 222).

Параграфом 223 начинаются собственные совершенно нового характера исследования Гаусса. К разделению форм на классы, данному раньше и по существу принадлежащему Лагранжу, присоединяется разделение классов на *порядки* (ordo) смотря по величине общего наибольшего делителя m коэффициентов a, 2b, c, общего для всех форм одного и того же класса. Форма называется примитивною, если $m = 1$ или 2; притом в первом случае она примитивна собственно (proprie), во втором не собственно (improprie). Классы примитивного порядка разделяется на роды (genera). Все числа n, представляемыя одною и тою-же примитивною формою определителя D и взаимно простыя с 2D или D, имеют одинаковые квадратичные характеры по отношению к простым множителям определителя D, а так же при известных ограничениях и по отношению к модулям 4 и 8. Эти *специальные* характеры, которых число есть λ, составляют вместе *полный* характер формы и класса, к которому форма принадлежит; все классы, которые имеют один и тот же полный характер составляют один род (genus). Число λ всех возможных полных характеров есть очевидно 2^{λ} и является вопрос, существует ли для каждого из них соответствующий род. Решение этого вопроса зависит от теории композиции форм, к которой Гаусс переходит (§ 234—252) и которая составляет одну из самых глубоких и важных частей

высшей арифметики. Я позволю себе поэтому остановиться на ней подробнее. Простейший пример этой теории нами несколько раз упоминался: формула

$$(x^2 + y^2)(t^2 + u^2) = (xt - yu)^2 + (xu + yt)^2 \quad (1)$$

Эта формула была несомненно известна Диофанту и вероятно также и ученым пифагорейской школы так как тесно связана с построением прямоугольных треугольников. Диофант пользуется ею при решении 22-й задачи 3-й книги, в которой ищет четыре прямоугольные треугольника, имеющие одну и ту же гипотенузу. Из двух треугольников имеющих гипотенузы 5 и 13 он составляет третий имеющий гипотенузу равную произведению 5 и 13 т.-е. 65. В примечании к этой задаче Фермат точно формулирует теорему, выражаемую равенством (1). Циклический метод решения уравнения Фермата индейских математиков (см. главу V) основан существенным образом на более общей формуле:

$$a(y^2 + au^2)(t^2 + au^2) = (xt + au^2)^2 + a(xu + yt)^2 \quad (2)$$

Эта формула была точно формулирована Эйлером в мемуаре: De resolutione formularum quadraticarum (XXII. 1759). Наконец Лагранж в последнем параграфе своих приложений рассматривает еще более общий случай двух трехчленных бинарных форм, дающих в произведении форму того же вида.

$$(x^2 + 2Bxy + Cy^2)(t^2 + 2Btu + Ct^2) = X^2 + 2BXY + CY^2,$$

где $X = xt - Cyu$, $Y = xu + yt + ayu$. (3) Эта формула есть частный случай более общей формулы, в которой произведение двух бинарных форм есть также бинарная квадратичная форма: $(ax^2 + 2Bxy + a'Cy^2)(a't^2 + 2Btu + aCu^2) = aa'X^2 + 2BXY + CY^2$

где $X = xt - Cyu$, $Y = (ax + By)u + (a't + Bu)y$. (4)

Формулы, выражающие X и Y посредством x, y и t, u в формулах (1—4). суть частные случаи общего *билинеарного* преобразования:

$$X = p_0 xt + p_1 xu + p_2 yt + p_3 yu$$

$$Y = q_0 xt + q_1 xu + q_2 yt + q_3 yu,$$ которое мы для сокращения будем обозначать $\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix}$.

Общая задача, которую решает Гаусс в отделе о композиции форм, заключается в обобщении формул (1—4), т.-е. в нахождении коэффициентов p и q билинеарного преобразования, при котором произвольная бинарная квадратичная форма $AX^2 + 2BXY + CY^2 = (A, B, C)$ распадается на произведение двух бинарных квадратичных форм (a, b, c) и (a', b,' c'), подобно тому, как в формуле 1 форма $X^2 + Y^2$ превращается при билинеарном преобразовании $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ в произведение двух форм $x^2 + y^2$ и $t^2 + u^2$ или как в формуле (3) форма $X^2 + 2BXY + CY^2$ при билинеарном преобразовании $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -C \\ 0 & 1 & 1 & 2B \end{pmatrix}$ разлагается на произведение двух бинарных квадратичных форм того же вида.

Форма F = (A, B, C) называется (§ 235) составленною (compositа) из форм φ=(a, b, c) и ψ=(a', b', c',).

Так, напр., из форм (10, 3, 11) и (15, 2, 7) составляется форма (6, 5, 21). Все три формы имеют один и тот же определитель 101. Будем обозначать соотношение между формою F и компонирующими ее формами φ и ψ символом $F = \varphi\psi$.

Основною теоремою в теории композиции собственно примитивных форм является следующая теорема, важность которой выяснится особенно в следующей главе: *Если формы φ и φ' принадлежат к одному и тому же классу A, формы ψ и ψ' — к одному и тому же классу B, то формы $F = \varphi\psi$ и*

$F' = \varphi'\psi'$ *принадлежат к одному и тому же классу* C (§ 239 и 249).

Наиболее простое доказательство этой теоремы, основанное на теории представления числа формою, дано Дирихле в его академической диссертации: De formarum binariarum secundi gradus compositione (Werke II. p. 105).

Важнейшее следствие этой теоремы заключается в том, что на основании ея мы можем от композиции форм перейти к композиции классов: класс C есть класс, составленный из классов A и B.

Гаусс эту операцию составления классов уподоблял сложению и соответственно этому обозначал

$$C = A + B.$$

По многим причинам представляется более удобным говорить об умножении классов и соответственно этому обозначать

$$C = AB.$$

Класс, составленный путем композиции различных форм одного и того же класса A, будет обозначаться A^2 (у Гаусса 2A) и т. д.

Мы остановимся подробнее на свойствах операции умножения классов в следующей главе и ограничимся теперь только указанием на некоторые термины, введенные Гаусом, и некоторые результаты, им найденные. Он называет *главною* формою (§ 231) форму $x^2 - Dy^2$ и главным классом H весь тот класс, в который входит эта форма. Из формулы (2) и основной теоремы вытекает, что $H^2 = H$; легко доказывается также равенство $(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2)(x'^2 - Dy'^2) = (AX^2 + 2BXY + CY^2)$, где X и Y связаны с x, y и x', y' формулами билинеарного преобразования, т.-е. $AH = HA = A$. Эти свойства главного класса показывают, что в умножении классов он играет ту же роль, какую единица в умножении

чисел, и объясняет его название. Если два собственно примитивных класса при умножении дают главный класс, то они называются *противоположными*. Если класс сам себе противоположен, то он называется двухсторонним [у Гаусса anceps, иногда ambig (Куммер], квадрат двухсторонняго класса есть главный класс. Обратно всегда можно найти класс форм, который по возвышении в квадрат дает класс главного рода.

Вместе с композицею форм и классов Гаусс изучает и композицию родов и порядков и вводит аналогично термину „главный класс" термины „главный род" и „главный порядок" (§ 245—249). В следующих параграфах (§ 253—261) Гаусс изучает число классов в отдельных родах и число двусторонних классов и приходит к важному результату, что число родов (λ) не может превышать половины числа всех возможных полных характеров. На этом результате он основывает новое *второе* доказательство закона взаимности, которое считается глубочайшим из всех данных им шести доказательств (§ 262). Чтобы точнее определить число λ Гаусс создает теорию тернарных квадратичных форм (§ 266—300) и открывает таким образом новую область исследований—теорию квадратичных форм со многими переменными. Эта область была позже разработана Эйзенштейном, Эрмитом, Смитом, Минковским и двумя русскими математиками: безвременно погибшим талантливым молодым математиком В. А. Марковым и Г. Ф. Вороным. Говоря о введении геометрических представлений в теорию чисел, мы будем иметь случай остановиться на этих исследованиях. Гаусс основал на теории тернарных форм не только доказетельство теоремы, что число родов точно равно половине числа возможных характеров, (§ 287), он расширил вместе с тем теорию представления числа тернарною формою в более общий

вопрос о представлении бинарной формы тернарною (§ 278—§ 285) и наконец доказал до тех пор еще не доказанную теорему Фермата, по которой каждое число может быть представлено в виде суммы трех треугольных чисел (§ 293). В связи с этим Гаусс рассматривает вопрос о представлении числа, под видом суммы трех квадратов. Вопрос этот был предметом исследований Лежандра, который показал, что подобное представление невозможно для чисел вида $8n$, $8n+4$ и $8n+7$. Гаусс указал на связь числа представлений числа n под видом суммы трехквадратов и числом классов в главном роде бинарных квадратичных форм определителя $-n$ (§ 291). *) Эта теорема Гаусса является прекраснейшим примером более общих результатов, к которым пришли значительно позже Г. С. Смит и Минковский, основываясь на введеном Эйзенштейном понятии *меры* форм или представлений. Из представления числа под видом суммы трех квадратов Гаусс вывел доказательство, до него никем не данное, теоремы Фермата, по которой всякое число может быть разложено на сумму трех треугольных чисел. (§ 293).

Конец пятого отдела имеет громадное значение для теории чисел. В нем, во первых, даны замечательныя дополнения к теории композиции форм (§ 305—307), на которых мы остановимся в следующей главе. Во-вторых (§ 301—304) Гаусс дает без доказательств ассимптотическия формулы для среднего числа классов и родов и открывает этим целый ряд замечательных исследований по аналитической теории

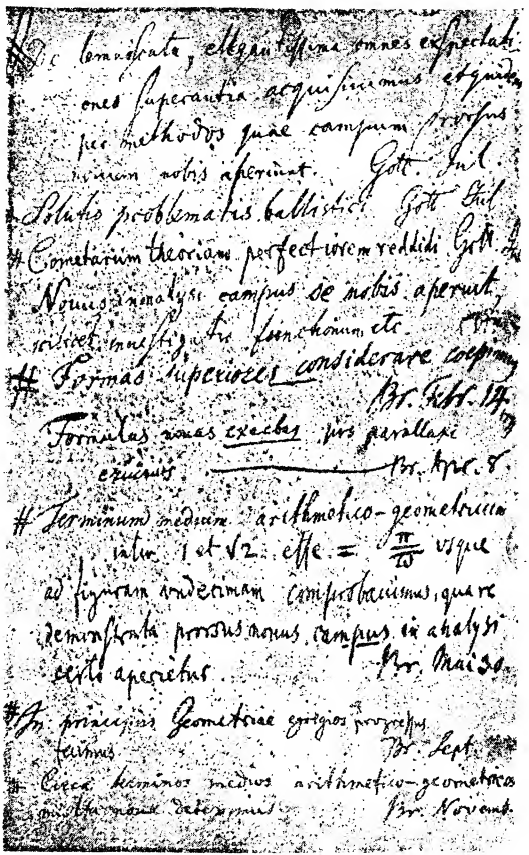
*) Некоторые частные случаи общей теоремы Гаусса даны Лежандром в его мемуаре 1785 г. (См. Théorie des nombres. 1830. Troisième partie. Теория чисел, разлагающихся на сумму трех квадратов (§ 262 — 323). Арифметический вывод теорем Гаусса, основанный на теории билинеарных форм с четырьмя переменными, дан Кронекером (Werke Bd. II. §. 427—495).

чисел (см. глав. XIII). В § 303 он между прочим дает те 65 значений отрицательного определителя, в которых каждый собственно примитивный положительный род имеет только один класс. Эти 65 чисел суть numeri idonei Эйлера и вывод Гаусса объясняет их значение в вопросе о характере числа, которое было указано Эйлером (см. выш. стр. 118).

Шестой отдел посвящен приложению результатов, найденных в предыдущих отделах, частью к разложению дроби $\frac{m}{n}$ на частные дроби, знаменатели которых суть входящие в n степени простых чисел p^{α}, частью к разложению дробей в периодические десятичные дроби и к определению величины периода по показателю, к которому принадлежит число 10 по модулю p^{α} (§ 309 — 328); далее мы находим в нем методы для различения простых и сложных чисел и в связи с этим представляющие впрочем более практический, чем теоретический интерес методы решения сравнения $x^2 \equiv A$ (мод M), уравнения $mx^2 + ny^2 = A$ и т. д.

Седьмой отдел, посвященный решению вопроса о делении круга на n равных частей, или, иначе говоря, вопроса о построении правильных многоугольников, вопроса, который приводится к решению уравнения $x^n - 1 = 0$, имеет громадное значение не только для теории чисел, но и для теории алгебраических уравнений и для геометрии. Для теории чисел он имеет громадное значение, как первый пример той глубокой связи, которая существует между учением о целых числах с одной стороны и алгеброю и геометриею с другой. После появления в свет „Исследований" Гаусса стало невозможным со стороны математиков то презрительное отношение к теории чисел, как к собранию любопытных, но не имеющих никакого приложения теорем, на которое во многих своих мемуарах жало-

вался Эйлер. Один из результатов седьмого отдела — возможность к известным с глубокой древности



Страница из дневника Гаусса.

построениям правильных многоугольников о 3 и 5 сторонах с помощью циркуля и линейки, прибавить

построения правильных многоугольников о 17, 257 сторонах и вообще многоугольников с $2^{2^n}+1$ сторонами, если $2^{2^n}+1$ есть число абсолютно простое и вместе с тем доказательство невозможности такого построения, например, правильного семиугольника—не могло не поразить геометров тем более, что Гаусс в самом начале отдела (§ 335) говорит о возможности подобных же построений для лемнискаты *). Для высшей алгебры седьмой отдел имеет громадное значение. С одной стороны исследования Гаусса являются замечательным приложением общих принципов, положенных Лагранжем в основание теории алгебраического решения уравнений, с другой стороны они несомненно повлияли на классические работы Абеля и Галуа. Уравнения деления круга представляют простейший пример так называемых Абелевых уравнений, которые благодаря замечательной связи, существующей между корнями, представляют особенный интерес, и значение их тем более велико, что Кронекер высказал в 1853 г. теорему, доказанную только тридцать лет спустя Вебером **), по которой корни всякого Абелева уравнения с рациональными коэффициентами рационально выражаются через корни уравнения $x^n - 1 = 0$.

*) В своем дневнике Гаусс отметил день своего открытия (30 марта 1796) и, сознавая его громадный интерес и значение, поспешил напечатать в литературном журнале Геттингена небольшую заметку. (Она перепечатана в известной юбилейной речи Шеринга и только недостаток места мешает нам воспроизвести ее). Вскоре после этого он говорил своему другу Вольфгангу Болэю, что геометрическое построение правильного 17-и угольника могло бы одно украсить его могильную плиту. Под влиянием другого его друга Бартельса молодой Лобачевский глубоко изучал Disquisitiones и в 1813 г. представил работу, относящуюся к теории деления круга (см. его алгебру гл. XVI). (Также см. мою биографию Лобачевскаго СПБ. 1911 г.).

**) H. Weber. Theorie der Abelschen Zahlkörper (Acta math. Bd. 8 и 9).

Таково содержание классического сочинения Гаусса, справедливо занимающего место в ряду величайших созданий человеческого гени . поразительного тем более, что оно написано было молодым человеком, не достигшим еще 24 лет. Подобно Principia mathematica philosophiae naturalis Ньютона или Principles of the human Knowledge Беркли, оно не могло быть сразу понято и оценено. Через двадцать лет после появления Disquisitiones, говорит Куммер в своей речи, посвященной памяти Лежена—Дирихле *), никто из живших тогда математиков, не мог вполне оценить и изучить эту книгу. Первый, кто овладел ею и задался целью разъяснить ее трудные места и сделать таким образом идеи Гаусса достоянием всех математиков, был Дирихле, и Дирихле преследовал эту цель в течение всей своей жизни. Биограф Гаусса Сарториус фон Вальтергаузен рассказывает, что подобно тому как священники не расстаются с своим молитвенником, Дирихле, до конца своей жизни, во все свои путешествия брал с собою изношенный, вышедший из переплета экземпляр Disquisitiones. И теперь после появления многих комментариев к Disquisitiones, после того как идеи заложенные в них, получили развитие и дополнение, сочинение Гаусса не потеряло своего значения. На многие столетия, читаем мы в лекциях Кронекера, это первое научное систематическое изложение теории чисел будет служить неисчерпаемым источником арифметических исследований.

Disquisitiones не есть единственный труд Гаусса по теории чисел. Им самим было издано несколько мемуаров, имеющих громадное значение; в его рукописях нашлись отрывки работ незаконченных, но касающихся важных, не затронутых в Disquisitions вопросов. Я должен ограничиться кратким указа-

*) Lejeune Dirichlet's Werke Bd. II. p. 216.

нием содержания всех этих работ для того, чтобы иметь возможность подробнее остановить внимание на тех основных идеях Гаусса, которые определили ход развития теории чисел в течение XIX столетия. Часть этих работ была напечатана еще при жизни Гаусса, другая часть—после его смерти и вошла в II-й том полного собрания его сочинений, вышедший в 1863 г. и снабженный примечаниями Шеринга и Дедекинда; наконец, благодаря любви к науке и настойчивости проф. Клейна, были изданы сначала дополнительный 8-й том, заключающий в себе также многие интересные отрывки из рукописей Гаусса, затем дневник (Tagebuch), проливающий яркий свет на работу его юношеских лет; продолжается также разработка его рукописей для подготовляемого нового издания, десятый том которого будет содержать в себе новый материал, извлеченный из рукописей Гаусса *).

По содержанию мемуары и отрывки, сохранившиеся в рукописях Гаусса, могут быть разделены на несколько групп.

Первая группа мемуаров посвящена главным образом доказательству закона взаимности. Не только недостаточное доказательство Лежандра, но и данные самим Гауссом в Disquisitiones два доказательства не могли удовлетворить его—первое по чрезвычайной сложности, второе как основанное на совершенно посторонних соображениях, и он естественно был приведен к разысканию новых более простых и более естественных доказательств.

К этому побуждало его также желание распространить законы теории квадратичных вычетов на

*) Об ходе этой работы проф. Клейн время от времени сообщает в Nachrichten Геттингенского общества. Девятый отчет помещен в томе за 1911 г. и представляет большой интерес для теории ассимптотических законов (см. дальше глава XIII).

вычеты кубичные и биквадратичные; этим вопросом он, как видно из его дневника, заинтересовался тотчас после издания Disquisitiones. В результате настойчивых стремлений Гаусс нашел еще шесть доказательств.

По простоте и естественности стоят на первом месте доказательства третье и пятое, опубликованные в 1808 и 1818 г. *). Эти доказательства основаны на замечательной лемме, которая носит название леммы Гаусса (она есть следствие теорем § 106 Disquisitiones и теоремы, данной в мемуарах 1808 и 1818 г.)**). С помощью символа Лежандра она может быть формулирована следующим образом

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\mu(q,\ p)}$$

где μ (q, p) есть число *отрицательных* абсолютно наименьших вычетов (по модулю p) произведений: 1. q, 2. q,... $\frac{p-1}{2}$. q. Отсюда имеем.

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\mu(q,\ p)\ +\ \mu(p,\ q)}$$

Таким образом доказательство закона взаимности

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$$

сводится к доказательству сравнения

$$\mu\ (q,\ p) \quad \mu\ (p,\ q) \quad \frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2} \ (\text{мод } 2). \quad (1)$$

Как оба доказательства Гаусса, так и другие доказательства, основанные на его лемме, сводятся к доказательству сравнения (1), но идут к этой

*) Theorematis arithmetici demonstratio nova. 1808. (W. Bd. II) Theorematis fundamentalis in doctrina de residuis quadraticis demonstrationes et ampliationes novae 1818. (W. Bd. II.)

**) См. Введение в анализ вып. I).

цели различными путями. Подробный анализ доказательств Гаусса и новые доказательства закона взаимности даны Кронекером в ряде замечательных мемуаров, помещенных в II и III томе собрания его сочинений. Обращаем особенное внимание на мемуар „Наименьшие абсолютные вычеты вещественных величин" *), в котором Кронекер между прочим показывает тесную связь между третьим и пятым доказательствами Гаусса: пятое доказательство есть логарифмическое преобразование третьего. Прибавим, что как в лекциях Лежена-Дирихле, так и в „Теории сравнений" Чебышева дано третье доказательство в несколько видоизмененной форме. Пятому и третьему доказательствам Гаусса посвящен также мемуар Фробениуса: Ueber das quadratische Reciprocitätsgesetz (Berliner Berichte 1914).

Что касается до других доказательств Гаусса, то четвертое и шестое основаны на теории деления круга. **)

Позже другие доказательства, основанные на теории деления круга, были даны Коши, Эйзенштейном, Якоби, Лиувиллем и Лебегом.

Наконец седьмое и восьмое доказательство Гаусса основаны на теории функциональных сравнений. Они даны в Analysis residuorum, который по первоначальному плану Гаусса должен был входить в Disquisitiones, как восьмой отдел. ***)

---

*) Werke Bd III. S. 113.

**) Werke Bd II.

***) Изложению различных доказательств закона взаимности посвящена монография Baumgart'a: „Ueber das quadratische Reciprocitätsgesetz. 1885. См. также Bachmann. Neuere Zahlentheorie 1902 г. стр. 200—286. На этих 86 страницах автор подробно анализирует более 45 доказательств закона взаимности, найденных с 1796 г. (первое доказательство Гаусса) до конца XIX столетия. Большинство этих доказательств основано на лемме Гаусса Из них наиболее простое принадлежит Целлеру (это доказательство приведено мною

Вторая группа работ Гаусса (Theoria residuorum biquadraticorum—Werke Bd II) и отрывки, относящиеся к теории кубических и биквадратичных вычетов—характеризуется главным образом введением в арифметику комплексного числа. Эта плодотворная идея при ее дальнейшем развитии привела к созданию арифметической теории алгебраических чисел и функций, которая, как мы уже имели слу-

---

в Введении в анализ вып. I. § 54). Его считает самым простым Дедекинд в статье „Ueber den Zellerschen Beweis des quadr. Reciprocitätssatz", помещеной в юбилейном сборнике Вебера (Weber-Festschrift. 1912). Из других доказательств, основанной на той же лемме упомянем доказательства Эйзенштейна (см. Граве. Элементарный курс теории чисел Киев 1914). Шеринга, Ланге (приведенное в Grundlehren der neueren Zahlentheorie-Bachmann'a 1907), В. Я. Буняковского. Теория деления круга применена к доказательству закона взаимности кроме Гаусса также Эйзенштейном (Mathematische Abhandlungen).

На теории квадратичных форм основаны два замечательные доказательства Куммера (Abh. Berl. Akad. 1861).

Отметим наконец оригинальное доказательство, данное Золоторевым. Наш талантливый математик основывает свое доказательство на теореме: если p есть абсолютно простое число, к—число взаимнопростое с p, то символ $\left(\frac{к}{p}\right)$ равен $+1$ или -1, смотря по тому получается-ли ряд наименьших положительных вычетов чисел 1 к, 2 к,.... (p—1) к при четном или нечетном числе перемещений двух чисел из ряда 1, 2,... p—1. В выше упомянутом мемуаре Фробениус обращает большое внимание на доказательство Золотарева. Из определения символа Якоби-Лежандра, данного Золотаревым, особенно ясно видно, что этот символ есть групповой характер (Gruppencharakter).

Очень поучительно также изложение различных способов доказательства закона взаимности двух простых чисел в прекрасном „Отчете о теории чисел С. Смита, (Works vol I)," на который мы обращаем особенное внимание читателя. Камилл Жордан в словах, посвященных памяти английского ученого, справедливо говорит, что в этой арифметической энциклопедии одинаково поражают и глубина эрудиции и серьезность критики (C. R. 1883 v. 95).

чай сказать, составляет одну из наиболее важных и интересных областей современной математики. (Об ней мы будем говорить в главе XI). Не менее плодотворное влияние на развитие теории чисел имели несколько страниц реферата, написанного Гауссом по поводу исследования Зеебера о тернарных квадратичных формах. На этих страницах Гаусс указал, какую громадную пользу приносит пользование геометрическими представлениями и первый из математиков вводит в геометрию новый объект геометрического исследования: пространственную решетку (см. гл. XII).

Наконец § 302 — 304 Disquisitiones, напечатанный уже после смерти Гаусса мемуар о связи числа классов бинарных форм с их определителем вместе с найденными еще позже замечательными отрывками, являются первыми исследованиями в области асимптотических законов и относятся к аналитической теории чисел (см. гл. XIII). Наравне с основною характеристическою особенностью Disquisitiones, отличающею эту книгу даже от глубоких исследований Лагранжа и заключающейся в систематическом проведении 1) идеи о классе и методическом пользовании линейными преобразованиями с целыми коэффициентами, три идеи Гаусса: 2) введение комплексного числа, 3) пользование геометрическими представлениями и 4) идея о тесной связи теории чисел с анализом имели выдающееся значение для всего дальнейшего развития теории чисел.

В виду этого наше дальнейшее изложение этих идей Гаусса и их развития его гениальными последователями составит предмет следующих четырех глав нашей работы.

X.

Основные идеи современной высшей арифметики.

Арифметика есть учение о четных и нечетных числах.
Платон.

§ 1. Распределение чисел на классы по модулю и операции над классами. Группа классов.

Уже введение понятия и обозначения *сравнения*, которым начинаются Disquisitiones, важно не только потому, что благодаря ему открывается важный для учения о сравнении путь аналогии между свойствами равенств и свойствами сравнений, которым, как Гаусс так и другие ученые после него широко пользовались *). Оно еще важнее потому, что ярко выставляет и подчеркивает основную характеристическую черту учения о целых числах, которая проходит насквозь через все учение, начиная с наиболее элементарного отдела (учение о сравнениях для ряда чисел $0, \pm 1 \pm 2, \pm 3, \ldots$) и кончая наиболее трудными и абстрактными отделами современной высшей арифметики (теория форм, арифметическая теория алгебраических чисел и функций). Эта характеристическая черта состоит в понятии о *классе*. Первый отдел вводит (самый термин однако отсутствует) для целых чисел понятие о *классе*, совокупности чисел, обладающих некоторым общим свойством, выделяющим эти числа из всего ряда натуральных чисел. Такая совокупность может быть рассматриваема как некоторое целое, и такие

*) См., напр. замечательный мемуар Пуансо „Sur l'application de l'algèbre à la théorie des nombres (Mémoires de l'Acad. des sciences de Paris. v. IV p. 99) Эта аналогия разрабатывалась также французским академиком Либри, о печальной карьере которого мы говорили в главе о Фермате.

совокупности могут сами сделаться предметом операций.

В элементарной теории сравнений, класс есть совокупность чисел, дающих один и тот-же остаток при делении на некоторое данное число m (которое называется модулем). Число классов, на которые распределяются тогда все числа, конечно и равно m. Эта *конечность* числа классов также характеризирует арифметику. В каждом классе можно выбрать одно определенное число, которое *представляет* собою все безконечное число чисел класса. Таким *представителем* удобнее всего сначала выбрать или наименьшие положительные или наименьшие абсолютные вычеты. Все числа N класса, имеющего представителем число r, могут быть представлены под видом $mx + r$ (у Эйлера, Лагранжа и Лежандра употребляются выражение: r + кратное от m). В Гауссовском обозначении $N \equiv r \pmod{m}$, как-бы *подчеркивается*, что рассматривается весь класс, как целое, а не его отдельные числа, соответствующие тому или другому значению числа x, что число x не имеет значения, что оно есть, по выражению Сильвестра, только тень (umbra); важны только число m, как определяющее распределение чисел между классами, и число r, характеризующее каждый отдельный класс. Вследствие введения понятия о классе, основные свойства сравнений, излагаемые в первом отделе Disquisitiones могут быть формулированы иначе. Так теорема о сложении сравнений (§ 6) заменяется теоремою: „если число α принадлежит к классу A, число β — к классу B, сумма $\alpha + \beta$ к классу C, то сумма чисел α' и β', соответственно принадлежащих к классам A и B, принадлежит к классу C". Это новая формулировка позволяет распространить на классы операцию сложения и ея терминологию и символику: класс C будет сумма классов A и B ($C = A + B$).

Операция сложения классов обладает очевидно свойством коммутативности и ассоциативности *)

$$1.\ A + B = B + A$$

$$2.\ A + (B + C) = (A + B) + C$$

но обладает и третьим свойством, которое мы, следуя примеру некоторых авторов, назовем свойством *монотонии*. По этому свойству: 3. если $A + B = A' + B$, то $A = A'$ и следовательно (принимая во внимание 1) если $A + B = A + B'$ то $B = B'$.

Подобным же образом теорема об умножении сравнений (§ 8) может быть формулирована вкратце следующим образом: „Какое-бы число класса A мы ни умножали на какое-либо число класса B, произведение всегда принадлежит к одному и тому же классу C". Операция получения из чисел классов A и B чисел класса C может быть названа умножением классов; клас C есть произведение классов A и B ($C = AB$).

Операция умножения есть очевидно также операция коммутативная и ассоциативная:

$$1.\ AB = BA$$

$$2.\ A(BC) = (AB)C.$$

Эти два свойства применяются одинаково в случае простого и сложного модуля. Что касается до свойства *монотонии*, то оно *в случае простого модуля* p сохраняется только в том случае, если мы исключим класс O, т. е. класс чисел делящихся на p; так как из сравнения $ka \equiv kb \pmod p$ не следует, что $a \equiv b \pmod p$, если $k \equiv o \pmod p$, то из равенства $OA = OB$ не следует равенство классов A и B. Что касается до оставшейся совокупности $p-1$ классов, то она характеризируется по отношению

*) См. мое „Введение в анализ" вып. I.

к операции умножения следующими тремя свойствами: 1. Из двух классов совокупности (различных или тожественных) путем умножения составляется третий, принадлежащий к той же совокупности.—2. Умножение классов есть операция ассоциативная: A (BC) = (AB) C.—3. Из равенств AB = A'B или BA = BA' следует равенство A = A'.

Всякая совокупность конечного числа элементов (чисел, вещей, операций, классов и т. п.), обладающая тремя свойствами: 1. из двух элементов путем некоторой операции составляется третий (элементы могут быть различны или тожественны). 2. операция составления есть операция ассоциативная и 3. монотонная — называется конечною группою; число ея элементов называется порядком группы *).

Следствием этих свойств является во первых, существование единицы (главного элемента группы) H (AH = HA = A), во вторых, возможность найти для всякого элемента A *обратный* элемент B, так что AB = H. Элемент B обозначается A^{-1}. Если операция, которая служит к составлению элементов, есть операция не только ассоциативная, но и коммутативная, то группа называется Абелевою.

Группа p — 1 классов есть очевидно Абелева группа. Взявши какой-либо класс A, мы получаем из него классы A, A^2, A^3,.. A^n.... Так-как число классов конечно, то между этими классами должны встретиться два тожественные A^x и A^{1+k}. Отсюда

*) Это определение группы дано Вебером (1882) в статье посвященной доказательству теоремы, что каждая собственно примитивная квадратичная форма может представить бесконечное множество простых чисел (Math. An. Bd. 20).В последнее время аксиоматическое исследование групп было предметом работ американских математиков Диксона, Мура, Гентингтона и др. Историческия сведения о теории групп читатель может найти в нашей брошюре: Математика. Казань 1916.

следует что, $A^{\cdot} - 1$. Применяя доказательство, данное Эйлером для теоремы Фермата, мы находим, что l—показатель, к которому принадлежит A (степень класса A или число членов периода) есть делитель порядка группы, т. е. числа p—1. Отсюда, как мы видели, вытекает теорема Фермата, которая может быть формулирована: $A^{p} \cdot 1$.

Доказанное Гауссом существование первообразного корня g для всякого простого модуля p дает возможность рассматривать все p—1 классов, как степени одного класса, который называется *основным*. Подобные конечные группы носят название циклических и изучались еще Лагранжем в теории перемещения букв.

Перейдем теперь к случаю сложного модуля m. Мы должны тогда для того, чтобы получить *группу* классов, исключить все классы, представители которых суть числа, имеющие общего делителя с модулем m. (исключенные классы Кронекер называет делителями O), ибо иначе совокупность классов не обладает, как легко видеть, монотониею. Оставшиеся $\varphi^{(m)}$ классов, которые называются *делителями единицы*, или короче единицами по модулю m., обладают всеми четырьмя свойствами, характеризующими Абелеву группу. Но так как для произвольного сложного числа m (Disquis. § (92), за исключением случая, когда m есть или степень простого нечетного числа или удвоенная степень простого нечетного числа или наконец равно 4) не существует первообразного корня, то не имеет места и то прекрасное свойство, по которому имеются числа, которых *период* содержит все числа взаимно-простые с m", и поэтому группа $\varphi^{(m)}$ классов не есть группа циклическая. Но как к Абелевой группе к ней применима тогда одна из важнейших теорем теории Абелевых групп: теорема, опубликованная почти одновременно Шерингом (1868 г.) и Кронекером (1870 г.).

Теорема эта, повидимому, известная Гауссу *), была найдена Шерингом при изучении композиции форм **). Кронекер, со свойственною ему способностью и любовью к обобщению, увидел, что принципы этой теоремы не зависят от того вопроса, с которым она была связана у Шеринга, и принадлежат более общей и более абстрактной сфере идей ***). Эту сферу идей мы называем теперь абстрактною теориею групп ****).

В приложении к элементарному примеру группы $\varphi(m)$ классов теорема позволяет представить каждый из этих классов в виде произведения степеней нескольких *основных* классов.

Для уяснения этой теоремы возмем пример $m = 45$. Все 24 класса делителей единицы представляются под видом произведения степеней двух классов 2 и 44, т. е. под видом $2^{\alpha}\ 44^{\beta}$. Так как 2 имеет периодом 12 ($2^{12} = 1$), а 44 — периодом 2 ($44^{2} = 1$), то α может принимать значения: 0,1...11, β. Комбинируя все возможные значения α и β, мы и получаем все 24 класса, так, например, $7 = 2.^{7}44, 17 = 2^{19}$. Вообще, в случае основных классов A, B C,... имеющих периоды a, b, c,... всякий класс может быть представлен под видом $A^{\alpha}\ B^{\beta}\ C^{\gamma}$..., причем α принимает значения 0,1,..a, β.—значения: 0,1... b и т. д. Система показателей α, β, γ,... совпадает

*) Werke Bd. II. Мемуар на франц. языке: доказательства некоторых теорем, касающихся периодов классов бинарных форм второй степени.

**) Die Fundamentalclassen der zusammensetzbaren arithmetischen Formen. Abh. d. Kgl. Ges. zu Göttingen 1868.

***) Auseinandersetzung einiger Eigenschaften idealer complexer Zahlen (Werke Bd. I. 171—183).

****) Желающие познакомиться с основаниями абстрактной теорией групп могут обратиться к первым главам второго тома Алгебры Вебера. Из более подробных сочинений укажем: Шмидт. Абстрактная теория групп. Киев, 1916 г.

с системою указателей (индексов), определение которой дано Гауссом в Disquisitiones *).

Если мы параллельно с группою $\varphi(m)$ классов будем рассматривать *изоморфную* с нею группу чисел $\omega_1, \omega_2, \ldots$ степеней первообразных корней уравнений: $x^{\alpha} - 1 = 0, x^{\beta} - 1 = 0, \ldots$ то легко найдем, что каждому классу соответствует определенное число $= \omega_1^{\gamma} \omega_2^{\delta} \omega_3^{\varepsilon} \ldots$ — *характер*.

Общая теория характеров групп развита Фробениусом в его замечательных мемуарах по теории групп.

2. Особенные свойства классов 1 (числовый луч) и класса 0 (одночленный модуль). Многочленные модули

Отдельные классы, рассматриваемые как индивидуумы, могут, подобно числам, иметь свои специальные свойства и в современной теории чисел изучение этих свойств оттесняет изучение свойств отдельных чисел. При всяком модуле как простом, так и сложном, особенный интерес представляют два класса: класс 1 и класс 0.

А. Особенность класса 1 заключается в том, что его числа воспроизводятся путем умножения и деления (по модулю). Действительно если $\alpha \equiv 1$ (мод. m) и $\beta \equiv 1$ (мод. m), то и $\alpha\beta \equiv 1$ (мод. m), т. е. произведение двух чисел класса 1 есть число того же класса. Употребляя для обозначения числа x удовлетворяющего сравнения $\alpha x \equiv \beta$ (мод. m) обозначение $x \equiv \frac{\alpha}{\beta}$ (мод. m), мы легко докажем, что если $\alpha \equiv 1$ мод. m) и $\beta \equiv 1$ (мод. m) то и $\frac{\alpha}{\beta} \equiv 1$ (мод. m).

Совокупность чисел, воспроизводящихся путем умножения и деления, Фютер **) предложил называть

*) См. об этом Dirichlet. Vorlesungen § 127 131, и Kroneker. Vorlesungen (1901). 19-лекция.

**) См. Fueter, Theorie des Zahlstrahlen (Crelle's Journ. Bd. 130 Weber употреблял термин: „Zahlgruppen" (Math. An. Bd. 48).

числовым лучем. Другой пример числового луча представляет совокупность всех квадратных вычетов данного числа, как результат свойства символов Лежандра и Якоби: $\left(\frac{Q}{P}\right)\left(\frac{Q'}{P}\right)=\left(\frac{QQ'}{P}\right)$

Б. Еще большее значение имеют те совокупности чисел, которые воспроизводятся операциями сложения и вычитания и которые Дедекинд в своих замечательных работах по арифметике алгебраических чисел предложил называть *модулями*.

Класс 0, т. е. совокупность всех чисел кратных некоторого числа m, есть очевидно пример модуля. Этот модуль мы будем обозначать (m) и называть m основанием одночленного модуля (m). Так, например (5) есть совокупность безконечного ряда чисел: $10, -5, 0, +5, +10, +15, \ldots$ Из всей совокупности вещественных целых чисел можно выделить и другие совокупности, обладающие тем же характеристическим свойством модуля.

Возьмем определенные целые числа m, n, p.... и придадим x, y, z,... всевозможные целые значения, тогда совокупность чисел вида $mx+ny+pz+\ldots$ очевидно есть модуль. Но m, n, p,... могут быть и произвольные числа (иррациональные или рациональные); по прежнему совокупность чисел $mx+ny+pz+\ldots$ будет модулем, который будет обозначаться знаком (m, n, p,...); числа m, n, p... называются основанием многочленного модуля. Не имея возможности подробно излагать теорию многочленного модуля, мы остановимся на важнейших свойствах одночленного модуля.

На модули распространяются понятия делимости, делителя, кратного, общего наибольшего делителя, наименьшего кратного.

Модуль (m) делится на модуль (n), если все числа, входящие в модуль m входят в модуль (n). Так все числа модуля (10) очевидно входят в модуль (2) и

следовательно модуль (10) делится на модуль (5), и модуль (5) есть делитель модуля (10) *).

Будем иногда обозначать это отношение между модулями знаком $<$; так (6) $<(3)$.

На основании этого определения модуля общий делитель модулей (m) и (n) есть очевидно совокупность чисел, включающих все числа модуля (m) и модуля (n), т. е. все числа вида mx и ny, где x и y суть целые числа; и по определению модуля, он будет включать следовательно и числа вида $mx + ny$. Но он будет включать и другие числа. Так наприм., общий делитель модулей (24) и (30) будет включать в себе и числа модуля (3), так как всякий делитель модулей (24) и (30) включает в себе числа этого модуля.

Напротив, общий наибольший делитель D модулей $\mu = (m)$ и $\nu = (n)$ (Дедекинд обозначает этот новый модуль D символом $(\mu, \nu$ **) включает в себе только числа вида $mx + ny$.

Так как одна из основных теорем теории чисел заключается в том, что всегда можно найти два целые числа x и y так, что $mx + ny = \delta$, где δ есть общий наибольший делитель чисел m и n, то следовательно модуль D содержит в себе число δ. Все его числа суть кратные δ, т. е. он совпадает с модулем (δ). Таким образом двучленный модуль (m, n) приводится к одночленному (δ) и легко видеть, что и всякий многочленный модуль приводится к одночленному модулю (δ).

Аналогично с определением делителя и общего

*) Определение делителя противоречит отношению между „объемами" модулей, т. к. в делителе больше чисел, чем делимом т. е. его кратном. Но зато сохраняется аналогия делимостью чисел.

**) Операция сложения модулей есть, очевидно, операция ассоциативная и коммутативная, но мы имеем добавочный закон $\mu + \mu = \mu$ подобно тому, как это имеет место в математической логике для умножения понятий.

наибольшего делителя можно дать определение кратного и наименьшего кратного двух или большего числа модулей. Модуль M—наименьшее кратное двух модулей (Дедекинд обозначает модуль M символом разности $\mu - \nu$ *)—есть совокупность чисел одновременно принадлежащих к обоим модулям. Например для модулей (24) и (30) наименьшее кратное есть модуль (120).

Над модулями, как над математическими индивидуумами, можно производить операции. Особенно важное значение, как мы увидим в следующей главе, имеет операция умножения. Произведением двух модулей μ и ν Дедекинд называет модуль, заключающий в себе все числа, получающиеся путем умножения какого-либо числа первого модуля на какое-либо число второго модуля, а также и все числа, получающиеся от сложения подобных произведений. Так произведение двух модулей (3) и (5) будет заключать в себе произведение всякого кратного числа 3 на всякое кратное число 5, а также и все числа, получающиеся от сложения подобных произведений.

Очевидно, операция умножения модулей есть операция ассоциативная и коммутативная. Роль единицы играет здесь, очевидно, модуль (1). Вместе с умножением модулей определяется и операция возвышения в степень, законы которой тожественны с законами аналогичной операции над числами.

Определения, данныя для одночленных модулей, переносятся без труда на модули многочленные. Но, как было выше указано, пока мы рассматри-

---

*) Предоставляем читателю найти законы операций нахождения разности модулей.

В статье: Was sind und was sollen die Zahlen (русский перевод в Казанском сборнике по основаниям арифметики), Дедекинд называет модуль M-общностью (Gemeinheit), Вебер употребляет термин: сечение (Durchschnitt).

ваем исключительно целые вещественные числа, теория многочленных модулей является ненужною, так как всякий многочленный множитель может быть заменен одночленным.

Теория многочленных модулей (Кронекер и его школа употребляют предпочтительнее термин: система модулей или делителей), приобретает напротив громадное значение, если мы будем рассматривать или числа какого-либо алгебраического тела (см. гл. XI) или целые функции от переменной с целыми коэффициентами (см. § 5). Но прежде чем перейти к этим двум замечательным обобщениям обыкновенной арифметики, начало которым положено также Гауссом в мемеуарах, изданных после Disquisitiones, полезно возвратиться к понятию о классе и дать возможность познакомиться с другими частными случаями этого общего понятия.

§ 3. Распределение бинарных квадратичных форм на классы и композиция классов.

В V-ом отделе Disquisitiones, понятие о классе и операциях над классами выступает у Гаусса еще определеннее, чем в первых двух отделах, посвященных числам. Понятие о классе является важнейшим результатом теории приведения; операции над классами изучаются в теории композиции форм. Аналогично конечности числа классов чисел по данному модулю, число классов собственно примитивных квадратичных форм данного определителя есть число конечное. Все формы одного и того-же класса могут представлять только одни и те-же числа, так что решение вопроса о представлении числа с помощью формы данного определителя сводится к решению вопроса для конечного числа *приведенных* форм. В каждом классе можно выбрать только одну приведенную форму, которая будет таким образом представителем класса, по-

добно тому, как в каждом классе чисел можно выбрать одно число—представитель класса.

Теория композиции форм изучает составление форм посредством умножения и, как мы видели (Гл. IX), на основании основной теоремы этой теории, приводит к определению операции умножения классов форм. Эта операция есть операция ассоциативная и коммутативная и на основании этого совокупность классов форм имеет все четыре свойства, характеризующие Абелеву группу. Таким образом к совокупности всех классов приложима теорема Шеринга-Кронекера. Классы главного рода составляют также Абелеву группу. Если все классы главного рода могутъ быть выражены степенями одного и того-же класса G, т. е. группа классов есть группа циклическая, то мы получаем полную аналогию с теориею степенных вычетов числа; класс G играет роль первообразного корня. Гаусс называет определители, при которых имеет место этот случай, *правильными* (§ 306); в противном случае определители называются *неправильными*. Во втором случае на основании теоремы Шеринга-Кронекера можно найти некоторое конечное число основных классов, так что каждый класс главного рода может быть выражен произведением степеней этих основных классов и охарактеризирован системою указателей.

§ 4. Классы в теории квадратичных иррациональностей.

Теории приведения форм, равно как и теории композиции, Гаусс придал строго выдержанную алгебраическую форму, вследствие чего изучение композиции форм в изложении Disquisitiones представляет большие трудности. Не желая прибегать к разложению на мнимые множители, Гаусс не прибегал и в случае форм с положительным определителем к разложению на вещественные иррациональные множители. Однако, есть основание

думать, *) что Гаусс при своих выводах пользовался таким разложением и только, подобно Ньютону в его Principia, предпочел синтетическую форму изложения. Дальнейшее развитие теории чисел, основанное не только на внимательном изучении Disquisitiones, но и на сближении теории чисел с другими отделами высшей математики, позволило придать теории Гаусса иную форму арифметики квадратичных иррациональностей или, иначе говоря, чисел квадратного тела. Необходимо, хотя в самых сжатых чертах, познакомиться с этою иною постановкою теории бинарных форм.

Каждой бинарной квадратичной форме $ax^2 + bxy + cy^2$ соответствует уравнение 2-ой степени $a\omega^2 + b\omega + c = 0$ и следовательно два корня этого уравнения ω_1 и ω_2. Назовем главным один из них, а именно корень $\frac{b + \sqrt{d}}{2a}$, где, если d положительно, корень взят со знаком +, если же d отрицательно, то $-i\sqrt{d}$ положительно.

Мы можем обобщить вопрос — рассматривая уравнение 2-й степени с произвольными вещественными коэффициентами; так что главный корень будет произвольным комплексным числом $x - iy$ ($y > 0$) и ввести понятия об эквивалентности чисел и о *классе*, называя эквивалентными числами или числами, принадлежащими к одному и тому же классу, все числа получающиеся из одного какого-либо с помощью унимодулярного линейного преобразования $\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$. Тогда можно **) в классе найти одно приведенное число, удовлетворяющее неравенствам: (I) $x \geq -\frac{1}{2}$; $x^2 + y^2 \geq 1$ и след. $y^2 \geq \frac{3}{4}$

*) Klein. Ausgewählte Vorlesungen der Zahlentheorie 1896.
**) Dedekind. Schreiben an Herrn Borchardt über die Theorie der ellipticshen Modulfunktionen. Crelle's journal, Bd. 83 (1877)

Понятно, что приведенные числа всех классов наполняют некоторый континуум (соответствующее геометрическое представление будет указано далее в главе XII); число классов таким образом безконечно велико.

В том частном случае, когда уравнение 2-ой степени имеет целые коэффициенты, т.-е. соответствует бинарной квадратичной форме, изучаемой в теории чисел, корни уравнения имеют форму $x + y\sqrt{d}$, где x и y суть целые или рациональные числа; что касается до d, то, не нарушая общности, мы можем считать d числом целым, отличным от единицы, и не имеющим квадратного множителя. Совокупность всех чисель $\omega = x + y\sqrt{d}$, где x и y суть рациональные числа, имеет то замечательное свойство, что алгебраическая сумма, произведение, частное двух таких чисел, а следовательно и всякая рациональная функция с рациональными коэффициентами есть число той-же совокупности, т.-е. совокупность воспроизводится операциями сложения, вычитания, умножения и деления подобно совокупности всех рациональных чисел. Дедекинд предложилъ называть такую совокупность „телом", желая этим отметить органическое единство всей совокупности. Рассматриваемая нами совокупность есть квадратичное тело и обозначается $R(\sqrt{d})$. Соответственно, тело рациональных чисел обозначается через $R(1)$.

В этом частном случае условия (I) позволяют показать, что для каждого данного определителя d существует только конечное число приведенных чисел, составляющих уже дискретную систему и следовательно доказать теорему, что число классов квадратичных иррациональностей, соответствующих бинарным квадратичным формам теории чисел, конечно. Эта теорема соответствует таким об-

разом теореме о конечности числа классов бинарных квадратичных форм *).

Тело R ($\sqrt{d}$) заключает в себе совокупность корней уравнения $\omega^2 + A\omega + B = 0$, где A и B суть целые числа. Эти корни суть целые числа тела. Обозначая тогда буквою m число 4d или d, смотря по тому, имеет ли место сравнение в первом случае $d \equiv 2$ или 3 (mod 4) во втором $d \equiv$ (mod 4), мы можем представить все целые числа под видом $t + u\,\frac{D + \sqrt{D}}{2}$, где t и u суть целые рациональные числа, т.-е. другими словами совокупность целых чисел, которые воспроизводятся действиями сложения, вычитания и умножения (такие совокупности называются *кольцами*), есть двучленный модуль $\left[1, \frac{D + \sqrt{D}}{2}\right]$ и такой двучленный модуль не может быть никоим образом сведен на одночленный.

5. Основания теории целых целочисленных функций.

Второй замечательный пример многочленного модуля выводит нас из сферы чисел в более общую сферу алгебраических величин. Высшая арифметика получает благодаря этому обобщению новый характер; вместо науки о целых числах она становится наукою о целом. Элементами ея являются не целые числа, но целые функции от одной или нескольких независимых переменных. Недостаток времени и места заставляет нас ограничиться простейшим случаем, когда эти элементы суть целые функции от одной переменной и притом с целыми коэффициентами. Тогда обобщенными многочленными модулями является совокупность целых функций

*) Более точное определение отношения числа классов иррациональностей и числа классов форм можно найти в мемуаре Вебера: „Theorie der Zahlgruppen" (Math. Ann. Bd 48) и в его Алгебре (том I, стр. 413).

вида $M, U, + M_2 U_2 + \ldots + Mi\ Ui$ где $M_1, M_2, \ldots Mi$ суть данные целые функции, а $U_1, U_2, \ldots Ui$ суть какие-либо целые функции. Начало этой общей теории мы находим также у Гаусса, который в напечатанном после его смерти: Analysis residuorum.*) рассматривал целые функции в двух предположениях:

1) при модуле целом числе p

2) в случае двучленного модуля $[p, f(x)]$.

В первом случае назовем две функции сравнимыми по модулю p или принадлежащими к одному и тому же классу, если коэффициенты при одинаковых степенях переменной сравнимы по модулю p. Очевидно, что если мы не ограничим степени m, то число классов будет бесконечно велико.

Если же мы будем рассматривать функции степени m (коэффициент при x^m есть поэтому число не делящееся на p), то число классов будет конечно и равно $(p-1)\,p^m$.

Понятно, что над этими классами могут быть производимы операции подобно тому, как это было показано в § 1, и что законы этих операций тожественны с законами операций над классами чисел. Функция A называется делимою на функцию B по модулю p, если можно определить функцию C так, что $A \equiv BC \pmod p$. Но и весь класс функций — это бесконечное множество функций—может-быть уподоблен целому числу и аналогично, например, сравнению по модулю числа m между числами мы можем рассматривать сравнения между классами по модулю класса.

Два класса функций или их представители A и B будут сравнимы по отношению к классу функции, представитель которого есть функция $M = f(x)$,

*) Werke Bd II

если разность A — B делится на функцию M (или модуль M) по модулю p, т.-е. если

$$A \equiv B + CM \pmod{p}$$

или иначе

$$A = B + Cf(x) + p\,f(x),$$

В этом случае A—B есть функция двучленного модуля, основания которого суть функция 0-й степени p и функция степени, m : f(x). Функции A и B будут принадлежать к одному и тому же классу по двойному модулю $\{p, f(x)\}$. Представителем класса можно считать функцию вида $a_0x^{m-1} + a_1x^{m-2} + \ldots . a_m - 1$ где числа $a_0, a, \ldots a_m$ суть целые числа из ряда 0, 1, ... p. Число классов конечно и равно p^m. К этим классам применяется вся теория классов, напр., имеет место теорема Фермата, по которой для всякой функции X не делящейся на функцию f(x): $x^{p^m-1} \equiv 1 \pmod{p, f(x)}$. Совокупность классов воспроизводится действиями сложения, вычитания, умножения и деления и представляет поэтому конечное тело, которое носит название поля Галуа (1811 — 1832). Талантливый безвременно погибший математик ввел в теорию чисел особые мнимые числа, теория которых совпадает с теориею классов функций по двойному модулю.

§ 6. Важнейшие понятия современной высшей арифметики.

На протяжении настоящей главы мы встретились с некоторыми понятиями и терминами; одни из них даны самим Гауссом, большая часть составляет естественное развитие идей им положенных в основание современной высшей арифметики. Так как наша наука в значительной степени характеризируется введением этих понятий, то мы считаем полезным более точное их определение и приве-

дение их в систему. Их общая черта заключается в том, что все эти понятия суть частные случаи общего понятия замкнутой системы целых чисел (или целых функций) или даже системы других замкнутых систем.

Так класс чисел есть замкнутая система чисел эквивалентных по отношению к некоторой группе преобразований. Класс целых чисел A по модулю m заключает в себе числа эквивалентные по отношению к группе преобразований $x = A + mt$, класс квадратных иррациональностей заключает в себе числа ω', получающиеся из числа ω линейными унимодулярными преобразованиями $\omega = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$, где $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ (α, β, γ, δ... суть целые числа). Мы встретились затем с рядом систем целых чисел или чисел тела $R(\sqrt{d})$, замкнутых по отношению к тем или другим операциям, иначе говоря, образующим область, определяемую этими операциями. 1) Если эти операции суть операции сложения и вычитания, то мы имеем *модуль*; 2) если эти операции суть операции умножения и деления — *идеал* *) 3) если операция — сложение, вычитание и умножение — *кольцо* **) и наконец, 4) в случае операции сложения, вычитания, умножения и деления — *тело* ***).

На этом последнем понятии, основном не только для высшей арифметики, но и для высшей алгебры, позволяю себе остановиться. Пока мы остаемся в

---

*) Вебер употреблял выражение: Zahlgruppe.

**) Кронекер употреблял термин *область целости* (Integritäts bereich), Дедекинд — термин *порядок*. Термин *кольцо* введен Гильбертом в его замечательном Отчете.

***) Кронекер называет такую систему областью рациональности (Rationalitäts bereich); англо-саксонские математики предпочитают термин *поле*. Русские авторы употребляют или термин: область (Вельмин) или *поле* (Граве) или *корпус* (Шатуновский). (Алгебра, как учение о сравнениях по функциональным модулям).

области чисел обыкновенной алгебры самое общее числовое тело есть тело, состоящее из всех вещественных и комплексных чисел вида $a+bi$.

В нем заключается (и называется *делителем*): 1) тело, состоящее из всех вещественных чисел алгебраических, т.-е. вещественных корней алгебраического уравнения с рациональными коэффициентами. 2) Другим его делителем является тело, состоящее из *всех* алгебраических чисел. Действительно доказывается, что если α и β суть два алгебраические числа, то $\alpha \pm \beta$, $\alpha\beta$ и $\frac{\alpha}{\beta}$ будут также алгебраические числа. Обобщая эти термины, находим, что всякая рациональная функция произвольного числа алгебраических чисел есть также алгебраическое число. В теле всех алгебраических тел заключается *кольцо* целых алгебраических чисел корней уравнений $x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_m = 0$, где коэффициент при высшей степени есть 1, а все прочие коэффициенты суть целые числа. Действительно, если α и β суть два целые алгебраические числа, то и $\alpha \pm \beta$, $\alpha.\beta$ суть целые алгебраические числа. Доказывается *), что и корень всякого алгебраического уравнения, коэффициенты которого суть целые алгебраические числа, есть также целое алгебраическое число. На основании этой теоремы, если α есть целое алгебраическое число, то и $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt[3]{\alpha}$ $\left[\sqrt[3]{\alpha}\right]^2$ суть целые алгебраические числа.

Отсюда, очевидно, что арифметика целых алгебраических чисел не имеет ничего общего с арифметикой целых чисел, ибо всякое целое алгебраическое число может быть бесконечным числом способов разложено на произведение целых алгебраических чисел, и неразлагаемых целых чисел не

*) См. Введение в анализ. вып. II. § 23.

существует. Иное представляет собою арифметика чисел вида (α), определяемых корнем некоторого неприводимого алгебраического уравнения $F(x) = 0$, т.-е. арифметика совокупности всех рациональных функций числа α с рациональными коэффициентами. Арифметика числовых тел или арифметическая теория алгебраических чисел составляет существеннейшую часть современной теории чисел; ее обобщение — теория тел алгебраических функций — есть основание современной высшей алгебры, созданной Галуа. К историческому очерку арифметической теории алгебраических чисел мы теперь и переходим.

XI.

Арифметическая теория алгебраических чисел.

Та громадная роль, которая принадлежит комплексному числу в современной математике — в теории функции, как и в высшей алгебре, в теории чисел, и в геометрии, и в математическом естествознании (символическая формула Минковского 3.10^5 килом. $= \sqrt{-1}$ сек.) неразрывно связана с именем Гаусса. Мы видели в главе VI, что в XVI веке для Кардана, одного из оригинальнейших умов эпохи Возрождения, мнимые корни были указатели невозможности решения задачи. В XVIII столетии знаменитое соотношение между показательною и тригонометрическими функциями ($e^{ix} = \mathrm{Cos}x + i\mathrm{Sin}x$), найденное Эйлером, решило спорный вопрос о логарифмах отрицательных чисел и оказало и оказывает громадную услугу в математических преобразованиях; Лагранж показал, что алгебраическое решение уравнения n-ой степени существенно зависит от комплексных корней n-ой степени из единицы. Но тем не менее, до появления в 1831 г. знаменитого мемуара „Theoria residuorum biquadraticorum", мнимые числа, как говорит Гаусс в этом

мемуаре, „не получили полного права гражданства в математике и действия над ними рассматривались как безсодержательная игра символами". Историческая правда заставляет однако указать, что еще у Валлиса (Algebra. Opera, v. II. 1693 ар. 66-69) мы находим указание на возможность конкретного представления комплексных чисел отрезками, отложенными на прямой перпендикулярной к прямой, на которой отлагаются вещественные отрезки. Подобные же замечания находятся и у многих других авторов (Кюн, Бюэ, Муре, Варрен *)); все эти попытки, однако, уступают в ясности и определенности теории геометрического представления комплексных чисел, данной Каспаром Весселем в 1797 г. и Аргандом в 1801 г. Но эти две работы остались незамеченными до последнего времени и таким образом идея геометрического представления комплексных чисел, равно как и выяснение значения их „метафизики" стали общим достоянием математиков только в 1831 г.

Для самого Гаусса вопрос о комплексном числе выяснился, однако, очень рано, еще в эпоху работы его над Disquisitiones. На это указывают многие места его докторской диссертации (1799), содержащей первое точное доказательство теоремы о существовании корня каждого алгебраического уравнения **).

В § 91 Disquisitiones по поводу вопроса о распространении теории указателей на случай модуля равного степени 2, Гаусс говорит о возможности введения мнимых указателей и высказывает намерение со временем изложить теорию мнимых величин, „которая до тех пор еще никем не была приведена к ясным понятиям". Это намерение и

*) См. подробнее: Введение в анализ. вып. II.

**) См. мою диссертацию: „Теория отделения корней систем алгебраических уравнений." Казань, 1884 г.

было приведено им в исполнение в 1831 г. в реферате, написанном им о его втором мемуаре по теории биквадратных вычетов. Мы отсылаем читателя к нашему Введению в анализ, вып. II, где он найдет перевод тех мест этого замечательного реферата, в которых Гаусс излагает свои взгляды на „метафизику" как мнимых, так и отрицательных чисел. После издания Disquisitiones и теория деления круга и желание распространить теорию квадратичных вычетов на вычеты кубические и биквадратные (этим вопросом он начал заниматься в 1805 г.), приводили его к мысли о введении мнимых чисел в арифметику. Около того же времени он разрабатывал теорию лемнискатических функций, которая приводила его к мысли о введении мнимых величин в теорию функций; к этому вероятно относится его отметка в дневнике „novum in analysi campus" В 1811 г. он уже имел возможность изложить в своем знаменитом письме к Бесселю от 18 декабря 1811 г. найденные им задолго до Коши основания новейшей теории функций от комплексной переменной. Он пишет при этом: „Наука может только потерять в порядке и закругленности от оттеснения на задний план фиктивных (fingirte) чисел и принуждена будет в таком случае на каждом шагу придавать общим истинам ненужные ограничения". К тому-же времени, как видно и из его письма к Дирихле и из вышеупомянутого реферата, он создал и арифметику комплексных целых чисел, „убедившись в том, что начала арифметики, до тех пор употреблявшиеся, недостаточны для общей теории, которая необходимо требует почти безконечного расширения области высшей арифметики (ut campus aritmeticae sublimioris infinities quasi promoveatur". *). Эта арифметика целых чисел вида $A + Bi$, изложен-

*) Werke, Bd. II p. 516.

ная им во втором мемуаре, требует прежде всего введение следующих определений и терминов. Гаусс называет нормою произведение двух *сопряженных* целых чисел $a+bi$ и $a-bi$, т.-е. a^2+b^2 и обозначает $N(a+bi)=a^2+b^2$.

Норма целого вещественного числа есть квадрат его абсолютного значения. Легко видеть, что норма произведения двух чисел A и B равна произведению их норм.

В теории целых вещественных чисел мы имеем две единицы $+1$ и -1. В теории целых комплексных чисел единицами будут четыре числа, которых нормы равны положительной единице, т.-е. $+1, -1, +i$ и $-i$. Четыре числа $a+bi$, $ia-b$, $-ia+b$, $-a-bi$, получающиеся от умножения одного из них на четыре единицы, называются ассоциированными. Эти числа вместе с четырьмя им сопряженными составляют совокупность восьми чисел, имеющих одну и ту-же норму: a^2+b^2.

Из общей теории комплексных чисел вытекает, что совокупность рациональных комплексных чисел составляет тело, т. к. воспроизводится операциями сложения, вычитания, умножения и деления; совокупность целых чисел составляет кольцо, т. к. воспроизводится тремя первыми операциями. Целое комплексное число α делится на целое число β, если можно найти третье целое комплексное число γ, так, что $\alpha=\beta\gamma$.

Числа сложные в обыкновенной арифметике будут очевидно сложными и в новой, но обратное заключение не верно. Простые числа обыкновенной арифметики разлагаются на множители, которые суть целые комплексные числа. Так $2=(1+i)(1-i)$. Всякое простое число вида $4n+1$ есть также сложное в арифметике Гаусса.

Если мы назовем в этой арифметике простыми числами те, которые не имеют других делителей

кроме единиц, самого себя и ассоциированных чисел, то простыми числами будут:

1) числа простые вещественные вида $4n+3$

2) комплексные множители чисел вида $4n+1$

3) число $1-i$.

Основная теорема теории положительных целых чисел состоит в возможности найти по данным двум положительным числам A и B в ряду целых положительных чисел два других числа q и r так, что $A = Bq + r$ и $r < B$ *)... (E).

Аналогичная теорема имеет место и в арифметике Гауссовых чисел. Если даны два целые комплексные числа A и B, то всегда можно найти два другие целые комплексные числа q и r так, что $A = Bq + r$ и $N(r) = N(A - Bq) < N(B)$... (G). Доказательство этой теоремы весьма просто и основывается: 1) на равенстве $N(A - Bq) = N(B) \cdot N\left(\frac{A}{B} - q\right)$ и 2) на том, что всегда можно, полагая $\frac{A}{B} = c + di$ найти $q = \lambda + \mu i$ так, что $c - \lambda$ и $d - \mu$ по абсолютной величине будут не более $\frac{1}{2}$ и потому $N\left(\frac{A}{B} - q\right) = N[(c - \lambda) + (d - \mu) i] < \frac{1}{2}$.

Подобно тому как из положения (E) вытекает алгорифм для нахождения общего наибольшего делителя, теорема Евклида и единственность разложения числа на простые множители натуральных целых чисел, положение (G) имеет своим следствием теорему: всякое сложное Гауссово число может быть только единственным способом разложено в произведение конечного числа простых чисел.

Из положения (E) вытекает разделение натуральных чисел на классы по модулю B. Подобным же образом из положения (G) вытекает, что полная система остатков Гауссовых чисел по модулю B и соответственно этому число классов равно

*) См. наприм. „Введение в анализ" вып. I.

норме B. Два числа, принадлежащие к одному и тому-же классу сравнимы по модулю B и все свойства сравнений переходят без изменения и в общую арифметику. Применяя к новым числам доказательства, данные Эйлером для теоремы Фермата и обобщенной теоремы и основанные на началах теории групп, мы получаем теорему Фермата для чисел вида $a+bi$ под формою:

Если число p есть простое и K—число, не делящееся на p, то $K^{N(p)-1} \equiv 1$ (мод. p).

После этого не представляет труда распространить теорию указателей, теорию первообразных корней и т. д. Введение комплексных чисел в теорию квадратичных вычетов придает этой теории большую простоту. Так закон взаимности двух простых чисел принимает в арифметике Гаусса форму $\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)$.

Теория комплексных целых чисел была создана Гауссом для того, чтобы на ней обосновать теорию биквадратичных вычетов натуральных чисел и в конце второго мемуара Гаусс формулировал теоремы этой теории, но оставил важнейшие из них без доказательства. Эта незаконченность исследований Гаусса побудила Якоби и Эйзенштейна к исследованиям в теории кубических и биквадратичных вычетов. Якоби дал в своих лекциях (1836—37 г.). первое доказательство закона взаимности в теории биквадратичных вычетов. Эйзенштейн дал пять доказательств этой теоремы, из которых два основаны на теории деления круга, а три на теории деления лемнискаты, т.-е. на теории лемнискатических функций. Новое обобщение комплексных чисел дало возможность Эйзенштейну вывести закон взаимности для вычетов восьмой степени *).

*) Исследования Эйзенштейна и теория Эйзенштейновских чисел изложена в главе упомянутоговыше сочинения Нейманова: О приложениях теории эллиптических функций и т. д.

Изучение теории кубических вычетов привело Якоби и Эйзенштейна *) к созданию арифметики

Карл Якоби (1804—1851).

чисел вида $x + y\rho$, где $\rho = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, т.-е. ρ есть кубический корень из единицы.

*) См. мемуар Эйзенштейна в 27-м томе журнала Крелле

Арифметика этих чисел также по существу тождественна с арифметикою натуральных чисел, так как для этих новых чисел также имеет место основная теорема: по двум данным числам A и B можно найти два числа q и r так что $A = Bq + r$ и $\left(N\frac{A}{B} < q\right) < 1$.

Но попытки дальнейшего обобщения теории Гауссовых чисел привели к высшей степени важному математическому факту. Эти попытки могли итти в двух направлениях, так как числа вида $a + bi$ можно рассматривать с одной стороны как числа, зависящие от корня двучленного уравнения $x^2 + 1 = 0$, т.-е. как частный случай чисел так называемого циклотомического тела, зависящего от корней уравнения $x^m - 1 = 0$. С другой стороны уравнение $x^2 + 1 = 0$ есть частный случай общего уравнения 2-й степени $x^2 + px + q = 0$, и теория Гауссовых чисел может быть обобщена в теорию чисел квадратного тела, т.-е. чисел вида $x + y\sqrt{D}$, где D есть произвольное целое число, неравное полному квадрату. Уже в случае $D = 5$ мы имеем следующий новый факт. Одно и то же число может быть двумя или более способами разложено на произведение двух неразлагаемых на множители вида $x + y\sqrt{-5}$ чисел. Так $6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$. $21 = 3 \cdot 7 = (-1 + 2\sqrt{-5})(-1 - 2\sqrt{-5})$; Для циклотомического тела подобная же особенность встречается, например, в случае уравнения $x^{23} - 1 = 0$ *). Для комплексных чисел, составленных из корней 5-й

*) Поздравляя Кронекера с днем, когда ему исполнилось 23 года (7 дек. 1846), Куммер шутливо прибавляет, что арифметическая особенность числа 23 не должна мешать его холостому ученику и другу „разбиться на два взаимно сопряженные комплексные множителя".

или 7-й степени из единицы имеет место теорема об однозначности разложения на простые множители и арифметика таких чисел отличается от обыкновенной только числом единиц. Исследования Куммера не дали ему возможности решить вопрос о приложимости законов обыкновенной арифметики к теории комплексных чисел, составленных из корней степеней $\lambda = 11, 13, 17, 19$. Но, начиная с $\lambda = 23$ Куммер пришел к выводу, что комплексное число не есть необходимо абсолютно простое, потому что оно не разлагается на множители. К ним не применим и Евклидов алгорифм для нахождения общего наибольшего делителя *). Весьма вероятно, что уже Гаусс обратил внимание на эту парадоксальную особенность и искал путь к ее объяснению. Лежен-Дирихле, Лиувилль и Коши сознавали необходимость обобщения, но только Куммеру удалось восстановить для комплексных чисел циклотомического тела (в случае λ простого) аналогию с арифметикою обыкновенных чисел — введением новой арифметической концепции — идеальных простых множителей.

Начало глубоких исследований Куммера относится к 1842 г. и повидимому связано, главным образом, с желанием доказать последнюю теорему Фермата. Грассман сообщает, что около этого времени Куммер, подобно Ламе, считал, что он нашел полное доказательство теоремы Фермата о невозможности решить в целых числах уравнение

$$x^l + y^l = z^l$$

и поспешил сообщить его Дирихле, который начал свою блестящую математическую деятельность доказательством этой теоремы для случая $\lambda = 5$.

Дирихле возвратил через несколько дней Кум-

*) См. Гаусс: Zur Theorie der complexen Zahlen. Werke Bd. II.

меру его доказательство с указанием, что это доказательство было бы вполне безупречно, если бы целые числа, зависящие от корня λ-ой степени из единицы, не только разлагались бы на неразложимые множители, но при том это разложение было бы единственное. Но если это второе предположение не имеет место, то большинство законов арифметики не существует для чисел области α [ ] и основанное на этих законах доказательство Куммера падает. Дирихле добавил, что ему кажется, что числа области α действительно не подчиняются законам арифметики. Со смелостью которую можно сравнить со смелостью Лобачевского, отвергшего постулатум Евклида или со смелостью творцев современной теории относительности, Куммер решил, как он об этом говорит в поздравительном письме к Кенигсбергскому Университету, что „арифметическое изучение чисел не должно быть прекращено, ибо эти числа даны природою и их понимание необходимо для проникновения в природу уравнений деления круга, для доказательства теоремы Фермата и для нахождения законов взаимности высших степений, наконец, для всей алгебры". Нельзя не отметить представляющего громадный интерес обстоятельства, на которое не раз указывал Куммер, что на развитие его мыслей много влияла аналогия с химией, что гипотетические радикалы последней навели его на мысль об идеальных множителях (см. подробнее главу XV). Нам не трудно теперь объяснить парадокс, встретившийся в области α, т.-е. возможность разложения одного числа двумя способами на неразложимые числа, примером, взятым из теории натуральных чисел 1, 2, 3, 4.... Представим себе все натуральные числа распределенными на две области K_0 и K_1, смотря по тому состоят ли они из четного или не

четного числа множителей. К области K_2 будут, таким образом, принадлежать числа $1, 4 = 2 \cdot 2$, вообще все квадраты: $6 = 2 \cdot 3$, $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ и т. д. На

Огюстэн Коши (1789 – 1857).

против, к области K_1 будут принадлежать все абсолютно простые числа, все кубы их,... $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ и т. п.

Если мы будем рассматривать исключительно числа области K_0, позабыв о существовании чисел K_1, то мы встретимся с тем же парадоксом, который встретился Куммеру при изучении некоторых циклотомических тел. Область K_0 заключает с одной стороны числа в этой области неразложимые (числа равные произведению двух равных или неравных множителей области K_0), с другой стороны числа разложимые на числа области K_0, и эти последние числа могут быть разложены двумя или более способами.

Например.

$$100 = 10\ 10 = 4.25;\ 330 = 6.55 = 10.3.3 = 22.15.$$

Вместо двух областей K_0 и K_1, мы можем взять области L_0 и L_1, состоящие—первая только из чисел вида $4n + 1$, вторая—только из чисел вида $4n + 3$. Область L_0 состоит: 1) из чисел неразложимых (абсолютно-простые числа вида $4n + 1$ и числа равные произведению двух равных или неравных чисел вида $4n + 3$, наприм., числа 17 и $21 = 3.7$) и 2) из чисел разложимых, т.-е. равных произведению нескольких чисел вида $4n + 1$. Эти разложимые числа, как и в предыдущем примере, могут быть разложены двумя или более способами на произведение двух неразложимых множителей. Так например $441 = 21^2 = 9.49$, причем числа $21, 9, 49$ суть числа неразлагаемые на числа области L_0. Подобным же образом $10857 = 141.77 = 21.517$. Но парадоксальность или точнее противоречие с законами арифметики всего ряда чисел исчезает, если мы пополним числа области K_0 числами области K_1 или числа области L_0 числами области L_1. Гениальная мысль Куммера и заключалась в том, что он поставил задачу: как должно расширить область чисел α для того, чтобы в расширенной области раз-

ложение чисел на простые множители стало бы снова единственным. *).

Эту задачу Куммер и решил вполне для области чисел α и он назвал новые делители, соответствующие числам области K_1 или L_1 *идеальными делителями*, так как они не существуют в области α; в частности он назвал простые делители, соответствующие простым числам 2, 3, 5 в области K_1 или простым числам 3, 7, 11 в области L *идеальными простыми* множителями; числа же области α он называл *действительными* (Wirkliche) числами

В примере областей K_0 и K_1 можно сказать, что все числа и действительные и идеальные составляют два класса K_0 и K_1, из них первый K_0 содержит все действительные числа и может быть назван *главным* классом; второй K_1, напротив, содержит только идеальные числа. Очевидно, что произведение каждого числа класса K_0 на число класса K_1 дает число класса K_1, произведение двух чисел класса K_0 дает число того же класса; напротив, произведение числа класса K_1 на число того же класса дает число класса K_0. Очевидно также (см. главу X), что мы можем говорить об умножении классов, рассматривая каждый из классов за индивидуум и что $K_0 K_1 = K_1 K_0 = K_1$, $K_1 \cdot K_1 = K_0 K_0 = K_0$.

---

*) В опубликованной по поводу 100-летнего юбилея дня рождения Куммера переписке его с Кронекером мы находим (письмо от 14 Июня 1846 г.) интересное указание на то, что по сообщению Дирихле Куммеру, Гаусс при обработке отдела о композиции форм, уже употреблял нечто в роде идеальных множителей и что, как говорил Гаусс Дирихле, именно к вопросу о композиции форм относится сноска к мемуару о разложении целых функций на линейные множители. „Если бы я захотел поступать так, как поступали ранее математики, употребляя мнимые, то одно из моих исследований, очень трудное, могло бы быть представлено под более легким видом."(Werke Bd III).

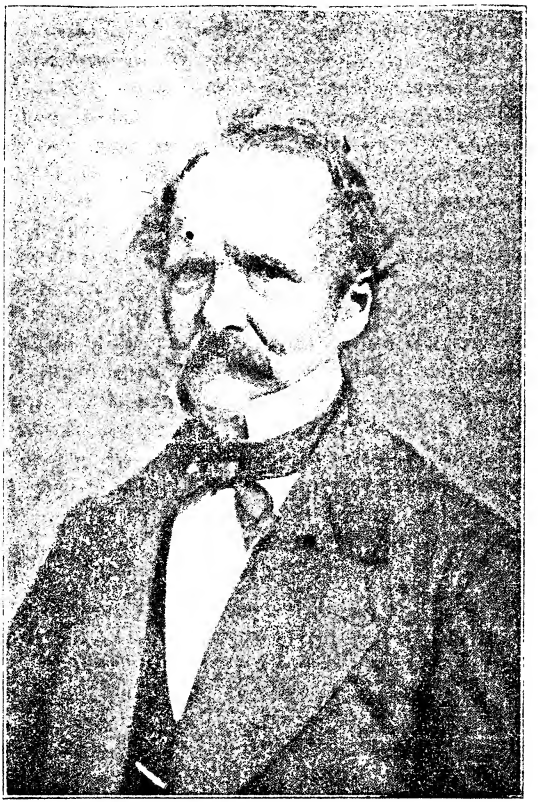
Куммер показал, что буквально такие же соотношения существуют для действительных и идеальных делителей области α, но только в более сложном виде. Число классов H, на которые распадаются все делители, как действительные, так и идеальные, конечно. Действительные делители составляют один главный класс K_0; идеальные группируются в H—1 классов: K_1, K_2, K_3, K_{H-1}. И здесь можно говорить об умножении классов, причем класс K_0 играет роль единицы. Теореме Фермата соответствует равенство $K_1^n = K_0$. Каждый идеальный делитель может быть рассматриваем как корень H-ой степени из действительного числа. Число классов есть важнейшее число всей теории. Куммер приложил к его определению методы аналитической теории чисел, созданные Дирихле (см. главу XIII) и нашел, что H всегда распадается на два множителя, из которых один определяется очень просто, определение другого представляет напротив большие затруднения.

Мы должны ограничиться сказанным, отсылая читателя к мемуарам Куммера. В особенности можно рекомендовать мемуар: Recherches sur les nombres complexes, помещенный в Journal de Liouville (Vol XVI). В конце этого мемуара, представляющем полное резюме работ Куммера, он прилагает свою теорию к делению круга и к доказательству последней теоремы Фермата (см. гл. XIV).

Теория идеальных множителей дана Куммером для случая циклотомического тела, определяемого уравнением $x^p - 1 = 0$, где p есть абсолютно-простое число. Ея распространение, данное Фуксом для циклотомического тела, определяемого уравнением $x^m - 1 = 0$, где m есть число сложное, *)

*) Journal Crelle Bd. 61 и 65.

Бахманом *) и Гериигом на случай тела, зависящего от двух квадратных корней не встретило



Эрнст Куммер (1810—18)

принципиальных трудностей. Такие трудности явились однако при распространении теории идеальных

*) ibidem Bd. 67.

чисел на тела, определяемые произвольным алгебраическим уравнением $F(x) = 0$. Теория Куммера *), основанная на соответствии, существующем между корнями уравнений $F(x) = 0$ и решениями сравнения $F(x) \equiv 0 \pmod{p}$ оказывалась неприменимою для тех исключительных простых чисел p, которые являются множителями дискриминанты уравнения $F(x) = 0$. К распространению общей теории и на этот случай направлены исследования Зеллинга **) и Е. И. Золотарева в его статье, напечатанной после его смерти в журнале Лиувилля ***). Теория Золотарева основана на теории функциональных сравнений высших степеней и, к сожалению, прошла почти незамеченною. ****) Вопрос о том, каким образом может быть основано на теории сравнений высших степеней разложение абсолютно-простых чисел на идеальные множители рассматривается в ряде работ Гензеля, *****) разработавшаго указания, данные Кронекером в его классической, но представляющей громадные трудности работе: „Grundsüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen".

Наибольшее влияние на дальнейшее развитие общей арифметической теории алгебраических чисел имели теории, созданные Дедекиндом и Кронекером, отличающиеся друг от друга по форме, но вместе с тем близкие по существу.

---

*) Полное собрание мемуаров Куммера не издано; полный список его мемуаров, относящихся к теории комплексных чисел, находится в „Report" Смита (Papers. p. 97).

**) Zeitschrift fur Mathematik und Physik. 1865 г.

***) Sur la théorie des nombres complexes. Journ. deLi ouville 1880 г.

****) Об ней упоминает только Кронекер в своих Grundzüge (Werke Bd. II S. 383). Бахманну (Theorie der Zahlkörper p. 153) она осталась неизвестною, не упоминается она и в отчете Гильберта.

*****) Crelle s Journ. Bd. 113.

Теория Дедекинда *) основывается на понятии о многочленном модуле и определении произведения модулей. По этому определению (см. выше глава § X) равенству между числами 6=2. 3 соответствует очевидно равенство [6] = [2]. [3]

Для уяснения основной идеи теории Дедекинда применим ее к области чисел L_m, в которой отсутствует, как мы знаем, единственность разложения числа на неразлагаемые числа. Так, например, 10857 = 141.77 = 21.517 равенство. которое может быть заменено другим: [10857] = [141] [77] = [21] [517]. Введем четыре двучленные модуля α=[141,21], β = [141,517). γ = [77,21 и δ = [77,517]. Но легко видеть, что эти модули как раз равны числам области L, : 3, 47, 7, 11. Поэтому введение этих двучленных модулей может заменить отсутствие чисел L и мы можем снова получить однозначное разложение числа области L_m на произведение двучленных модулей α, β, λ, δ, каждый из которых представляет собою совокупность действительных, т.-е. принадлежащих к области L_m чисел.

Подобным же образом поступаем в случае тела K ($\sqrt{-5}$), в котором отсутствует единственность разложения целого числа на неразлагаемые множители. Так, например, 21 = 3.7 =

$$(4 + \sqrt{-5})\ (4 - \sqrt{-5}).$$

Если мы составим двучленные модули (3, 4 + $\sqrt{-5}$), (3, 4 − $\sqrt{-5}$), (7, 4 + $\sqrt{-5}$) (7, 4 − $\sqrt{-5}$), то произведение этих неразлагаемых двучленных модулей дает по правилу умножения двучленных

*) Она опубликована им в первый раз в приложении к 2-му изданию лекций Дирихле 1871 (см. также третье издание, 1879. В расширенном и измененном виде она изложена в четвертом издании лекции Дирехле 1894.

См. также французский мемуар Дедекинда: Sur la théorie des nombres entiers algébriques, 1877 г. и Bachmann: Allgemeine Arithmetik der Zahlkörper. Leipzig. 1905 г.

модулей, модуль сводящийся к одночленному модулю (21), и это разложение одночленного модуля (21) в произведение четырех двучленных есть единственное. Таким образом снова восстановляется основной закон арифметики обыкновенных чисел и является возможность применить к числам тела K ($\sqrt{-5}$) все ея теоремы.

Двучленные модули, нами введенные, суть *идеалы*-Дедекинда. Они отличаются от идеальных чисел Куммера тем, что они представляют собою вполне реальную совокупность безконечного множества действительных чисел тела, между тем, как идеальные числа Куммера были только символами, соответствовавшими совокупности нескольких сравнений *).

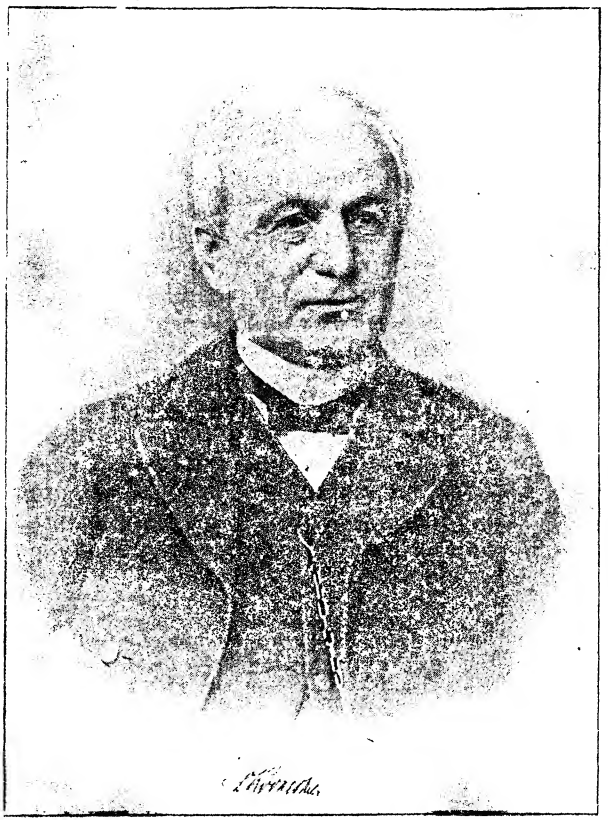
Недостаток места не позволяет нам сколько-нибудь подробно остановиться на изложении гениальной теории идеалов числовых тел, данной Дедекиндом и обобщенной им и Вебером на случай тела алгебраических функций в мемуаре: „Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen" (Crelle's Journ. Bd. 92. 1882) **). В том же самом томе журнала Крелле помещен знаменитый мемуар Кронекера, написанный к семидесятилетнему юбилею Куммера его учеником и другом и составляющий резюме тридцатилетней работы знаменитого немецкого арифметика и алгебраика над „арифметическою стороною алгебры".

---

*) В сочинении Ю. В. Сохоцкого „Начало общего наибольшего делителя в применении к теории делимости алгебраических чисел. „СПБ. 1893 г." автор показывает, что учение об идеалах может быть выведено из теории идеальных чисел данной Золотаревым.

**) Изложение теории Дедекинда читатель может найти в диссертации проф. Иванова „Целые комплексные числа" СПБ. Применение ее к частному случаю квадратичной области изложено проф. Вельминым (Введение в теорию алгебраических чисел. Варшава, 1913 г.).

Эта широкая цель, поставленная себе Кронекером и отражается в сочинении и делает его изучение необыкновенно трудным.



Леопольд Кронекер. (1823—1891)

Вместо приложения арифметической теории к алгебре, которое мы находим в вышеупомянутом мемуаре Дедекинда и Вебера, в „Festschrift“ Кроне-

кера вопрос ставится сразу во всей его широте: рассматриваются не алгебраические числа, но алгебраические величины, т.-е. корни алгебраического уравнения, коэффициенты которого суть переменные или неопределенные величины и их алгебраические функции.

Соответственно этой общей постановке первая часть мемуара содержит изложение теории Галуа с новой точки зрения, выдвигающей на первый план теорию систем уравнений *).

Вторая часть посвящена собственно арифметической теории алгебраических величин. Ее основной характер, как говорит сам Кронекер, состоит в „методическом пользовании неопределенными величинами как вспомогательным средством" и соответственно с этим в теории Кронекера в отличие от теории Дедекинда вместо многочленных модулей на первом плане стоят как линейные функции, так и формы, т.-е. целые рациональные функции от вспомогательных переменных, которые сами по себе не имеют значения, но которых коэффициенты суть функции известной области рациональности (термин, который Кронекер употреблял вместо термина „тело"). **)

*) Комментарий к этой части мемуара дан Мольком в Acta mathematica. Bd 7. Теория систем функций, данная Кронекером, изложена в моей докторской диссертации: Теория отделения корней систем алгебраических уравнений. Казань 1884 года.

**) Изучение теории Кронекера представляет до сих пор большие трудности. Пособием может служить изучение второй части (области рациональности и системы модулей) изданных Гензелем лекций Кронекера по теории чисел и сочинение Кенига „Einleitung in die allgemeine theorie der algebraischen Grössen".

В алгебре Вебера автор дает под названием теории функционалов видоизмененную теорию Кронекера и показывает ея связь с теориею Дедекинда.

В тесной связи с взглядами на взаимное соотношение арифметики и алгебры, положенными в основу классической работы Кронекера, находится его работа по основаниям арифметики: „Ueber den Zahlbegriff" *).

Развивая мысль, выраженную в словах Гаусса: „Математика есть царица наук и арифметика есть царица математики", Кронекер поставил себе целью: заменить алгебру арифметикою целых целочисленных функций неопределенных переменных и таким образом основать всю математику единственно и исключительно на понятии о целом положительном числе. „Математика должна быть арифметизирована. С помощию теории функциональных сравнений могут и должны быть исключены все те изменения и распространения понятия о числе, которые были введены ради приложения к геометрии и механике, и являются чуж-

Дальнейшим развитием теории Кронекера являются работы Гензеля в томах 101, 103, 105, 111, 113—журнала Крелле.

Литература по теории алгебраических чисел приведена в отчете Гильберта по теории алгебраических числовых тел (Jahresbericht der deutchen Mathematiker—Vereinigung. Bd. IV. 1897 г.).

Отчет этот представляет прекрасное, но сжатое изложение теории алгебраических чисел и самостоятельных исследований автора. Теория алгебраических функций с арифметической точки зрения изложена в сочинении Гензеля-Ландсберга.

Что касается до теории специальных числовых тел, то после квадратичных тел наиболее разработана теория тел кубических, и разработка этой теории есть заслуга русских выдающихся математиков Е. И. Золотарева, А. А. Маркова и Г. Ф. Вороного. Громадный интерес представляет также „Теория классовых тел" (см. гл. XIII, § 1).

*) Werke Bd. III. Русский перевод этой работы был помещен мною в Известиях Казанского физико-математического общ. за 1890 г. и перепечатан в Казанском сборнике по основаниям арифметики. См. также: „Введение в анализ", вып. II.

дыми арифметике, т.-е. понятия об отрицательных, дробных, несоизмеримых и комплексных числах“ *) („Der liebe Gott schuf die ganze Zahl, alles andere ist Menschenwerk“, говорил он).

XII.

Геометрия чисел.

§ 1. Точечные решетки.

„История математической мысли, рассматриваемая в ея целом, представляет собою победное шествие обобщающей и стремящейся вперед способности человеческого духа“ **).

Об этом говорит нам история учения о числе и выше мы уже имели возможность указать, как тесно связана история чистой математики с обобщением понятия о числе. Об этом говорит нам и история геометрии. Ея объектом до XIX века являлись исключительно непрерывные многообразия. Кривые и поверхности рассматривались исключительно как непрерывные многообразия элементов точек. В XIX столетии элемент точка заменяется элементом: прямая или плоскость (принцип дуализма), вводятся элементы безконечно-удаленные и мнимые. Громадное значение приобретают циклические точки, т. е. пересечения двух мнимых прямых: $x + iy = 0$ и $x - iy = 0$ (минимальные прямые) с безконечно удаленною прямою. Введение понятия об абсолюте позволяет рассматривать метрическую геометрию, как частный случай проэктивной геометрии и объединяет гипотезы острого, прямого

*) Идея эта была развита по отношению к иррациональным числам еще Коши. См. Шатуновский (Алгебра, как учение о сравнениях по функциональным модулям. Одесса, 1918 г.).

**) См. мой „Принцип экономии“ (Труды II съезда преподавателей математики).

и тупого угла или геометрии Лобачевского, Евклида и Риманна. Такое же объединяющее и обобщающее значение имеет введение теории групп преобразований. „Геометрия есть группа", говорит Пуанкаре, и с этой точки зрения геометрия становится частным случаем общего учения о многообразиях и измерений.

XIX век вводит и еще одно обобщение: начинается изучение дискретных (раздельных) систем точек и прежде всего конфигураций, состоящих из конечного числа точек. Введение этих геометрических образов есть заслуга Пуансо, изучавшего конфигурации, состоящие из вершин правильных звездчатых многоугольников и многогранников и показавшего в замечательном мемуре: „Reflexions sur les priencipes fondamentaux de la theorie des nombres" *) связь многих вопросов теории чисел с теориею конфигураций, напр., связь вопроса о звездчатых многоугольниках с числовою функциею Эйлера $\varphi(m)$. Но поразительным примером влияния, которое может иметь природоведение на развитие математики, является тот факт, что первая работа, в которой implicite рассматривается безконечная система дискретных точек, есть появившаяся в 1830 г. работа ботаника А. Брауна, касающаяся вопроса расположения чешуек на шишках сосны (Pinus strobus). Несколько позже (1837 г.) братья Браве опубликовали работу, касающуюся листорасположения (о филотаксисе см. главу XV). Но уже 1831 г. Гаусс в своем реферате о работе Зеебера, посвященной тернарным квадратичным формам, дает указания на геометрический метод решения этого вопроса, заключающийся в рассмотрении пространственных решеток. Пространственные решетки и

*) Русский перевод помещен в Казанском сборнике по основаниям арифметики.

повидимому также связь их с кристаллографиею занимали Гаусса задолго до опубликования реферата о работе Зебера: в его бумагах сохранился отрывок, относящийся повидимому к 1808-1809 г., в котором он исследует кубические вычеты, употребляя уже пространственные решетки *).

В 1848 г. появился обстоятельный геометрический мемуар Огюста Браве (1811—1863) „Sur les systémes formés par des points distribués réguliérement par des points dans le plan ou dans l'espace". Проф. В. И. Вернадский в своем прекрасном курсе верно оценивает „необычную ясность, изящество и глубину мысли", проявленную Браве в его работах; думается, что русский перевод мемуара Браве, до сих пор сохраняющего свое научное значение несмотря на некоторые недостатки, исправленные Федоровым и Шенфлисом, был бы, вероятно, радостно встречен и славянскими математиками и минералогами.

В 1850 году Лежен-Дирихле в мемуаре „Ueber die Reduktion der positiven quadratischen Formen" **) подробно развил краткие указания Гаусса. После мемуаров Браве и Дирихле, теория точечных решеток на плоскости и в пространстве приобрела громадное значение как в кристаллографии, так и в теории чисел. Мы принуждены ограничиться сжатым изложением связи решетки на плоскости с теориею бинарных квадратичных форм. Полную аналогию представляет связь пространственной решетки и теория форм тернарных.

Точечная система на плоскости есть система, состоящая из безконечного множества *тождественно* расположенных точек или иначе совокупность точек пересечения двух рядов параллельных линий, из кото-

*) Werke Bd VIII. s. 15-20.
**) Werke, Band II s. 21—42

рых каждые две, принадлежащие к одному ряду, находятся на равном расстоянии одна от другой. Для того, чтобы построить такую систему, мы можем, следовательно, взять две оси Ox и Oy, пересекающиеся в точке O под углом φ, на одной из них отложить в ту и другую сторону произвольный отрезок r, на другой отрезок s. Проведя затем через точки деления оси Ox линии, параллельные оси Oy и, vice versa, мы получим систему узловых точек, косоугольные координаты которых будут $x = mr$, $y = ns$, где m и n суть числа целые. Такую точку обозначим символом (m, n). Наше построение, дает однако не только точечную решетку, но и параллельную решетку, систему двух рядов параллельных линий. Эта параллельная решетка является геометрическим образом однозначно соответствующим определенной бинарной квадратичной форме, так как расстояние произвольной точки (m, n) от начала координат по формуле Эвклидовой геометрии равно $m^2r^2 + 2mnrs\cos\varphi + n^2s^2$ — или, полагая $r = \sqrt{a}$, $s = \sqrt{c}$, $\cos\varphi = \frac{b}{\sqrt{ac}}$ (откуда $b^2 - ac < 0$), расстояние выражается формою $am^2 + 2bmn + cn^2$ с отрицательным определителем $-D$ ($D = ac - b^2$). D выражает, как не трудно видеть, площадь параллелограмма, образуемого четырьмя смежными узловыми точками. Но из полученной точечной решетки мы можем очевидно получить безчисленное множество параллельных решеток, переходя от одной системы координатных осей к другой по формулам преобразования:

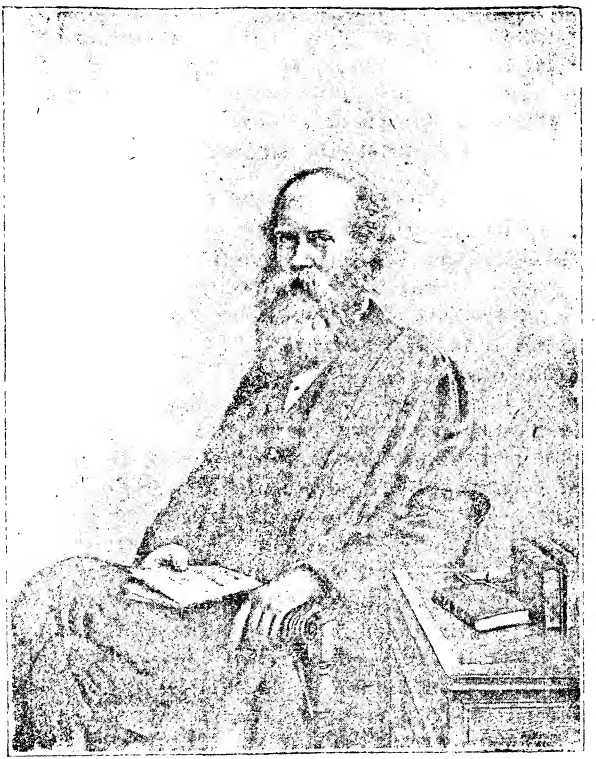
$$x' = \alpha x + \beta y$$

$$y' = \gamma x + \delta y$$

Если $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ суть числа целые и притом $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$ *) то точечная система остается без изменения. Но новой параллельной решетке соответствует новая бинарная форма, эквивалентная с формою. Безчисленному множеству параллельных решеток соответствует таким образом безконечное множество эквивалентных квадратичных форм, и каждая точечная решетка может таким образом быть рассматриваема, как геометрический образ, представляющий собою класс квадратичных форм отрицательного определителя. Приведенной форме соответствуют параллелограммы, стороны которых удовлетворяют условиям, вытекающим из условий, определяющих коэффициенты приведенной формы. Соответствие между теориею бинарных квадратичных форм с отрицательным определителем и решеткою представляет, конечно, большой интерес, но еще больший интерес представляет с геометрической точки зрения аналогичная теория в случае положительного определителя. Формулы евклидовской геометрии в этом случае, очевидно, неприменимы, но развитие геометрии в XIX веке, как мы указали в начале главы, дало возможность обобщить формулы геометрии и в частности формулу для расстояния. В так называемой гиперболической геометрии (совпадающей с геометрией Лобачевского) расстояние выражается, напротив, квадратичною формою с положительным определителем; минимальные прямые—мнимые в геометрии Евклида, как проходящие через круговые точки,—в гиперболической геометрии вещественны; вместо кривой равных растояний—круга—такою кривою является равносторонняя гипербола. На этих положениях гиперболической

*) Если $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$, то получается зеркальное отражение точечной системы, с нею вполне совпадающее. В случае пространственных решеток аналогично получается зеркальное отражение, не совмещающееся с первою решеткою.

геометрии основано геометрическое представление теории бинарных квадратичных форм, данное Клейном в его лекциях *) и в одной из первых работ Пуанкаре, за которую французский математик по-



Стефен Смит (1826—1883).

*) Vorlesungen ueber ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie. Göttingen, 1896.

лучил академическое кресло, еще не имея 27 лет *). Другой путь для геометрического представления теории форм с положительным определителем дан Стефеном Смитом в 1874 г. в мемуаре „Sur les équations modulaires" **).

Связь, которую работы Клейна и Пуанкаре установили между теориею чисел и геометриею (теорию решеток и невклидовою геометриею), объясняется конечно теми общими свойствами групп линейных преобразований, которые одинаково важны и для теории квадратичных форм и для неевклидовой геометрии.

§ 2. Геометрия многих измерений.

Подобно тому, как теория бинарных форм с положительным определителем пользуется представлениями невклидовой геометрии, геометрия пространства многих измерений является незаменимым пособием в теории квадратичных форм с многими переменными.

Десятилетие 1844—1854 г. является одним из наиболее знаменательных периодов в истории арифметики. В течение этого десятилетия Куммер развил и опубликовал свою теорию идеальных чисел, Чебышев—свои исследования об абсолютно-простых числах, Кронекер напечатал результаты своих работ по теории деления круга и комплексному умножению эллиптических функций; к этому же десятилетию относится начало математической деятельности Кэли и Сильвестра. В 1843-м г. французский математик Эрмит начал свою знаменитую переписку с Якоби и в 1850 г. напечатал в журнале Крелл'е (том 41) мемуар". „Sur l'introduction des variables continues dans les théorie des nombres".

*) Sur un mode nouveau de representation géometrique de formes quadratiques définies et indéfinies (Journ. de l'Ec. Polyth. t. 28, 1880).

**) Mathematical Papers, Vol. II.

Эти работы Эрмита обратили внимание математиков снова на вопросы о минимумах, значение которых видели еще Эйлер и в особенности Лаг.

Шарль Эрмит (1822—1901).

ранж (см. гл. VII и VIII) и были первыми из целого ряда мемуаров, посвященных теории минимумов. Только недостаток времени и места мешает нам

выполнить наше намерение посвятить особую главу этой теории, точно также как и остановиться на исследованиях Сильвестра по аддитивной теории чисел и Кэли и Смита по теории систем чисел (матриц).

Упомянутые работы Эрмита, основанные на введении непрерывных переменных (громадное значение этой мысли объясняет, почему этому введению придается название принципа Эрмита), заключают между прочим и крайне важные результаты, относящиеся к теории приведения квадратичных форм с произвольным числом переменных, т.-е. к вопросу о выделении из бесчисленного множества форм эквивалентных между собою по отношению к группе унимодулярных линейных преобразований (все такие формы составляют один класс) одной *приведенной*, коэффициенты которой ограничены некоторыми неравенствами. Эрмитом дана основная теорема, по которой наименьшая отличная от нуля величина, представляемая положительною квадратичною формою n переменных при определителе, равном постоянному целому числу D, не может превышать известного предела зависящего только от числа n и значения определителя D, эта теорема доказана им аналитическим путем без помощи геометрических представлений. Этим же путем шли и выдающиеся русские математики Коркин и Золотарев, А. А. Марков и др. Первые показали многие интересные свойства так называемых „крайних" форм. А. А. Марков *) остановился на вопросе об определении точного минимума квадратичных форм положительного определителя **).

*) „О бинарных квадратичных формах положительного определителя". СПБ. 1880 г.

**) Исследования А. А. Маркова связаны с целыми числами особаго рода, которые встретились Ивану Бернулли III-ему (1781) при решении одного вопроса, а также с целыми числами, удовлетворяющими уравнению $x^2+y^2+z^2=3xyz$. См. мемуар Фробениуса: Ueber Markoffsche Zahlen (Berl. Ber. 1913).

Систематическое приложение геометрии к вопросам, поставленным Эрмитом, принадлежит Минковскому. Минковский представляет себе пространственную решетку, узловые точки которой имеют координатами целыя числа. Каждый куб, образованный восемью смежными точками, имеет по этому ребра равными единице.

H. Minkowski

Герман Минковский (1861—1909).

Если $F(x, y, z)$ есть однородная положительная квадратичная форма от x, y, z, определитель которой равен 1, то уравнение $F(x, y, z)=c$ представляет определенный эллипсоид, центр которого находится в начале координат. Представим себе около каждой точки решетки равный и равно расположенный эллипсоид; если значение c достаточно мало, то эти эллипсоиды не имеют общих точек. Пусть наибольшее значение c, при котором эллипсоиды могут касаться друг друга, будет $\frac{M}{4}$. Так как при таком выполнении пространства на каждый куб с ребром 1 приходится только один эллипсоид, то очевидно, что объем эллипсоида $F(x, y, z) \frac{M}{4}$ меньше объема куба, т.-е. $\frac{4\pi}{3}\sqrt{\left(\frac{M}{4}\right)^3} < 1$, откуда $M < \sqrt{\frac{6}{\pi}}$. С другой стороны легко видеть, что эллипсоид $F(x, y, z)=M$ не заключает кроме нуля ни одной узловой точки; но так как на его поверхности лежат узловые точки-центры эллипсоидов, касающихся эллипсоида $F(x, y, z)=\frac{M}{4}$, то M есть наименьшее, отличное от нуля и представляемое целыми числами, значение квадратичной формы. Таким образом геометрическая постановка вопроса дала Минковскому возможность почти без вычислений решить глубокий вопрос теории чисел. Обобщение на формы с переменными дает не только доказанную Эрмитом основную теорему, но и позволяет указать более тесный предел для минимума формы. Но еще важнее то, что Минковский при своем доказательстве пользовался только тем свойством эллипсоида, что он представляет выпуклую фигуру с центром и поэтому во всем ходе рассуждений Минковского эллипсоид может быть заменен произвольною выпуклою фигурою, имеющею центр. Это обстоятельство привело

Минковского к убеждению, что выпуклое (никогда не вогнутое) тело, т.-е. тело, имеющее то свойство, что отрезок, соединяющий две точки тела, всеми своими точками принадлежит телу, составляет основное понятие науки и принадлежит к ее плодотворнейшим орудиям.

Для построения теории выпуклых тел Минковский употребляет особую геометрию, сохраняющую аксиому о параллельности, но заменяющую аксиому о равенстве треугольников аксиомою, по которой сумма двух сторон треугольника больше третьей. Подобно тому, как геометрия Лобачевского прилагается с успехом к многим математическим дисциплинам, например, к теории аутоморфных функций, геометрия Минковского имеет громадное значение для теории чисел.

Из своих исследований, основанных на новой геометрии, Минковский вывел снова результаты крайне важные для теории чисел, в том числе общую теорему, одним из простейших следствий которой является доказательство конечности числа классов положительных квадратичных форм данного определителя.

Все эти исследования были встречены Эрмитом с величайшим интересом. С редким к сожалению, в ученом мире беспристрастием, Эрмит признал, что методы Минковского имеют большое преимущество сравнительно с его методами. „Они открыли мне, писал он Минковскому, совершенно новый арифметический мир, обетованную землю".

Но Минковский не ограничился работами в той области чистой математики, которая повидимому наиболее далека от вопросов природоведения. Та смелость мысли, с которою он построил для целей теории чисел новую неевклидовую геометрию и оперировал образами геометрии многих измерений, проявилась и в его знаменитом ме-

муаре: „Пространство и время“ *). Введя в уравнения электродинамики, данныя Максвеллем, вместе с тремя пространственными координатами четвертую координату---время, умноженное на $\sqrt{-1}$, Минковский придал уравнениям замечательную симметрическую форму. После введения этих мировых координат он имел право сказать: „отныне время и пространство отдельно взятыя не существуют“.

XIII.

Теория чисел и анализ.

§ 1. Инварианты классов. Теоремы Кронекера.

„После понятия о равенстве абсолютном одно из самых важных понятий математики есть понятие о равенстве относительном или о эквивалентности“**). Ведение этого понятия в учение о числах ведет к определению понятия о классе чисел, т.-е. совокупности чисел эквивалентных.

В главе X мы видели, какое значение имеет для учения о *целом* числе разделение целых чисел на классы по отношению к целому модулю m. Мы можем определить эти числа как эквивалентные по отношению к группе преобразований:

$$x' = x + mt, \qquad (1)$$

где x и x', равно как m и t суть числа ряда: $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

*) Русский перевод, сделаный мною, помещен в „Известиях Казанскаго физико-математического Общества“ за 1911 г. и в „Новых идеях в математике“ Сборник. № 5.

**) Положения, излагаемые в начале этой главы, были высказаны в виде напечатанных тезисов к моей магистерской диссертации: О функциях рациональных, аналогичных с функциями двояко-периодическими. Казань, 1880 г.

„Класс чисел будет таким образом совокупность чисел, переходящих одно в другое вследствие соответствующей группы преобразований, и таким образом как бы равных по отношению к преобразованиям группы".

Группа (I) может быть рассматриваема как повторенное безконечное число раз *производящее* преобразование $x' = x + m$. Совокупность всех целых чисел может быть поэтому рассматриваема, как класс чисел эквивалентных по отношению к группе, производящее преобразование которой есть

$$x' = x + 1.$$

Мы можем применить определение эквивалентности по отношению к группе преобразований (I), заменяя целые числа x и x' комплексными числами $z = x + iy$ и $z' = x' + iy'$. Числа z и z' будут эквивалентны, если $y = y'$, $x' \equiv x$ (мод. m).

Разделение области комплексных чисел на классы по отношению к группе (I) может быть тогда наглядно изображено, благодаря геометрическому представлению комплексных чисел точками (аффиксами числа); для этого плоскость должна быть разделена на безконечное множество полос линиями, параллельными оси Oy и проходящими друг от друга на расстоянии равном m. Тогда всякому числу z соответствует эквивалентное *приведенное* число z_0, аффикса котораго лежит в так называемой *фундаментальной* области, за которую можно принять, например, или полосу, ограниченную осью y и линиею, которой уравнение есть $x = m$ или полосу, ограниченную линиями $x = \pm \frac{m}{2}$.

„Всякому вопросу об эквивалентности соответствует вопрос об инварианте, т.-е. такой функции, которая, во-первых, имела бы одно и то же значение для всех эквивалентных чисел и, во-вторых,

обратно каждому значению которой соответствуют только эквивалентные числа" *).

Инвариант есть следовательно функция, не меняющаяся от всех преобразований группы. Значение инварианта в теории групп преобразований или эквивалентных чисел соответсвует тому значению, которое имеют в высшей алгебре, созданной Лагранжем и Галуа функции, неизменяющиеся от групп перемещений букв, (симметрические, знакопеременные, циклические, метациклические и т. п.).

Для класса целых чисел, эквивалентных по отношению к группе (I), инвариантою является или функция $\operatorname{tang}\frac{\pi z}{m}$ или $e^{\frac{2\pi zi}{m}}$. В том случае, когда z есть некоторое целое число, соответствующее значение трансцендентной показательной функции есть один из корней уравнения $\xi^m = 1$, т.-е. некоторое целое алгебраическое число циклотомического тела (см. гл. X). Громадное значение этих целых алгебраических чисел вытекает из знаменитой теоремы Кронекера: „корни всякого Абелева алгебраического уравнения с целыми коэффициентами суть рациональные функции этих целых алгебраических чисел" **) или иначе говоря решения всякого Абелева алгебраического уравнения с целыми коэффициентами сводится на решение уравнений деления круга.

Группа преобразований $z' = z + mt$ есть простейший частный случай группы линейных (или проэктивных) преобразований вида $z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ ***).

*) В лекциях Кронекера, изданных Гензелем, инварианта называется характеристическою, если она удовлетворяет не только первому, но и второму условию.

**) Berl. Monatsber. 1853.

***) Предоставляем читателю, знакомому с основаниями теории эллиптических функции, рассмотреть группу преобразований $z' = z + m K + m' K'i$, где m и m′ суть произволь-

Анри Пуанкаре (1854 – 1912).

Соответствующие этим группам инварианты носят названия аутоморфных функций; начало их теории положено Пуанкаре в ряде сообщений, сделанных в Парижской Академии в 1881—83 г., и в ряде мемуаров, напечатанных в первых томах „Acta mathematica“ *) (1882—84).

Из этих групп особый интерес представляют: 1) группы конечные, т. е. состоящие из конечного числа преобразований и 2) группы, получающиеся в предположении, что α, β, γ, δ — суть целые числа, удовлетворяющие равенству $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ (модулярные группы).

Теория конечных групп совпадает с теориею групп движений, совмещающих правильные многогранники; инвариантами являются рациональные функции специального вида **). Соответственные классы чисел состоят из конечного числа (2n, 12, 24, 60) эквивалентных комплексных чисел ***).

В тесной связи с этим первым вопросом находится новая отрасль математического природоведения—математическая кристаллография (см. гл. XV).

Для теории чисел напротив представляет особый

ные целые числа, K и K′ произвольные вещественные числа. Этой группе соответствует разделение плоскости на конгруентные прямоугольники и двоякопериодические функции, с периодами K и K′i, как инварианты.

*) В 1916 г. издан под редакциею Дарбу второй том: „Oeuvres de Henri Poincaré“. Другим источником для изучения аутоморфных функций может служить сочинение Клейна и Фрике: Vorlesungen über die Theorie der automorphen Functionen 1897.

**) Для знакомства с конечными группами можно рекомендовать книгу Клейна: Vorlesungen über der Ikosaeder 1884. См. также мою выше упомянутую диссертацию.

***) Решение этого вопроса зависит от решения в целых числах Диофантовского неравенства

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > 1.$$

Интерес второй случай, когда группе соответствует класс эквивалентных чисел, связанных равенством

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$$

где α, β, γ, δ суть целые числа, удовлетворяющие условию: $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

В § 4 гл. X были рассмотрены свойства этого класса и было указано, что в этом классе всегда можно найти число $\omega = x + yi$ такое, что $x^2 + y^2 \geqslant 1$, $|x| < \frac{1}{2}$.

Континуум всех чисел, таким образом определенных, наполняет полосу, снизу ограниченную кругом радиуса 1, имеющим центр в начале координат и с боков двумя линиями параллельными оси y и находящимся от нее на расстоянии равном $\frac{1}{2}$.

Исходя из этой фундаментальной области, мы можем покрыть всю плоскость эквивалентными областями, получающимися, применяя к фундаментальной области все преобразования группы. Функция, которая как в фундаментальной области, так и в каждой с нею эквивалентной, принимает всевозможные значения и является инвариантою для модульной группы, т. е. удовлетворяет уравнению $\psi(\omega) = \psi\left(\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}\right)$, обратила уже на себя внимание Гаусса, как видно из оставшихся ненапечатанными дополнений к его знаменитому мемуару о среднем арифметико-геометрическом числе; в этих дополнениях находится и рисунок фундаментальной области. Позже эта функция рассматривалась Эрмитом и Дедекиндом и носит теперь название модульной функции. Она тесно связана с теориею эллиптических функций, получающихся при обращении эллиптических интегралов. Ея выражение особенно просто, если рассматривается Вейерштрассовская функция

$\wp$ (u), являющаяся при обращении эллиптического интеграла

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^3 - g_2 x - g_3}}$$

Если периоды функции $\wp$ (u) обозначены буквами ω_1, ω_2, а их отношение буквою ω, то отношение $\frac{g_2^3}{g_2^3 - 27\, g_3^2}$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\wp(\omega) = \wp\left(\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}\right), \quad \text{если} \quad \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$$

есть одно из преобразований модульной группы.

Таким образом отношение $\frac{g_2^3}{g_2^3 - 27 g_3^2}$, рассматриваемое как функция от ω будет следовательно искомая модульная функция J (ω).

Частные значения этой функции J (ω) для тех комплексных чисел ω, которые суть корни уравнения $a\omega^2 + b\omega + c = 0$ с целыми коэффициентами, суть целые алгебраические числа, которые сохраняют одно и то же значение для всех чисел, принадлежащих к одному и тому же классу. Так как классы чисел ω соответствуют классам квадратичных бинарных форм, то эти целые алгебраические числа носят название инвариантов класса (Class invarianten) и имеют весьма важное значение для теории бинарных квадратичных форм. С другой стороны числа ω квадратичного мнимого тела имеют то замечательное свойство, что соответствующая им эллиптическая функция от (nu) для некоторого комплексного множителя (n), выражается рационально через эллиптические функции от (u.) Кронекер в своих исследованиях по этому вопросу (теория комплексного умножения) дал в 1857 г. замечательную теорему, по которой классовые инварианты играют для квадратичного мнимого тела ту же роль, которую корни из единицы играют для

тела рациональных чисел. По этой теореме корни всякого Абелева уравнения, коэффициенты которого суть числа квадратичного мнимого тела, выражаются рационально с помощью классовых инвариантов.

Сопоставление двух теорем Кронекера *) естественно приводит к задаче об их обобщении на случай, когда вместо области рациональных чисел или чисел мнимого квадратичного тела, рассматривается тело каких либо алгебраических чисел.

Эту задачу. Гильберт считает одною из самых глубоких и самых важных во всей теории чисел и функций. **) К решению этой задачи, говорит он, можно повидимому прийти различными путями. Решение арифметической части задачи должно основываться на общем законе взаимности вычетов l-той степени в произвольном теле чисел ***)

---

*) Доказательство первой теоремы Кронекера дано было Вебером (1886) в его теории Абелевых тел и позже Гильбертом (1896). (Смотри его классический отчет: § 100—131). Что касается до второй теоремы, „юношеской мечты Кронекера", то доказательству ея посвящены работы проф. Фютера в Базеле (1903—1910), основанные на теории „числовых лучей" (см. гл. X). Некоторые недостатки доказательства автор предполагает пополнить в специальном сочинении о комплексном умножении эллиптических функций.

**) Труды 2-го Международного Математического съезда в Париже, стр. 89.

***) Современная постановка учения о законах взаимности какой-либо степени в произвольном алгебраическом теле создана выдающимися работами Гильберта (1897 — 1899), который в мемуаре об относительно-квадратичных числовых телах указал, что употребляемые им методы и в особенности теория классовых тел могут дать законы взаимности высших степеней. Это указание Гильберта нашло подтверждение в работах Фуртвенглера, Вельмина, Лицмана и др. Первый дал доказательство существования классового тела для произвольной алгебраической области (Math. Ann. Bd. 63. 1907); второй изучил теорию вычетов восьмой степени (Варшава, 1913).

Что касается до той части задачи, которая относится к теории функций, то здесь исходною точкою должны служить те поразительные аналогии, которые существуют между теориею алгебраических функций и теориею алгебраических чисел. Так числу классов соответствует род Римановской поверхности; теореме о существовании конечного интеграла на поверхности Римана должно соответствовать доказательство существования некоторого специального алгебраического числа; принципу Дирехле — теорема о существовании некоторых специальных простых идеалов и, наконец, знаменитой теореме Абеля соответствует в теории тел, для которых число классов идеалов равно 2, обобщенный закон взаимности квадратичных вычетов. Тесная связь, которая уже в настоящее время существует между задачами трех основных ветвей математики: теориею чисел, алгеброю и теориею функций, приводит Гильберта к убеждению, что для успехов теории аналитических функций от многих переменных необходимо открытие и изучение функций, которые для данного тела алгебраических чисел должны играть ту же роль, которую показательная функция играет для тела рациональных чисел и модулярная функция для мнимого квадратичного тела *).

§ 2. Аналитическая теория чисел.

Та тесная связь, которая существует между теориею чисел и анализом, проявляется в тех взаим-

*) Задача, поставленная Гильбертом, вызвала уже многия интересныя исследования, имеющия целью распространение теории модулярной функции на многия переменные. К тѣмже модулярным фунтам, к которым приводя эти исследования Блюменталя и Геке (Mathem. Ann. Bd. 55, 58, 71 (1912) пришел исходя из задачи преобразования Абелевых функций Пикар и показал связь этих групп с аутоморфными преобразованиями некоторых тернарных квадратичных форм.

ных услугах, которые эти два отдела чистой математики оказывают один другому.

Приложения анализа к теории чисел составляют сами особый отдел математики, который носит название аналитической теории чисел и начало которому положено Эйлером (см. гл. VII) и Гауссом (см, гл. IX). Эйлер и Гаусс пользовались анализом, т.-е. учением о непрерывном, для решения вопросов теории чисел подобно тому, как создатели математической физики (Фурье, Пуассон, Коши, Ламе), стоя на молекулярной точке зрения, заменяли тем не менее в своих исследованиях конечные суммы определенными интегралами.

Но только Лежен-Дирихле стал систематически искать познания тайн целых чисел, применяя к этому исканию методы учения о непрерывном. Поэтому его исследования резко отличаются от исследования его гениальных предшественников тем, что его методы дают не только случайные результаты, но решение общих задач арифметики, не поддающихся чисто арифметическим методам. Куммер в речи, посвященной памяти своего учителя справедливо говорит, что методы Дирихле составляют для теории чисел такую же эпоху как и гениальная „révolution scientifique" (выражение Огюста Конта), произведенная Декартом, когда он в своей Géometrie научил систематически прилагать анализ к геометрии. Первое приложение нового метода решения аналитических вопросов, сделанное Дирихле, касалось теоремы, по которой каждая арифметическая прогрессия, числа которой не имеют общего множителя, содержит в себе безконечное множество простых чисел. Мы уже имели случай упоминать об этой теореме (см. главу VIII), на которой между прочим основывалось, как на постулатуме, первое доказательство закона взаимности, данное Лежандром. Обобщение приема, которым

Эйлер, рассматривая соотношение между безконечным произведениям и безконечною строкою (см. главу VII) доказал безконечность числа простых чисел, привело Дирихле к новой методе определения предельного значения общего ряда степеней положительных убывающих чисел, общий показатель которых стремится к единице. Необходимость при применении этой методы доказать, что некоторая сумма отличается от нуля, представила большую трудность, особенно в том случае, когда разность арифметической прогрессии есть число сложное. Но именно эта трудность была преодолена Дирихле и результат, полученный им послужил поводом ко второму приложению анализа к теории чисел, к одному из наиболее важных и блестящих открытий Дирихле, а именно к определению числа классов бинарных квадратичных форм. Сумма оказалась совпадающею с числом классов и следовательно не равна нулю. Вопрос об определении числа классов бинарных квадратичных форм занимал Гаусса; из отрывка одного мемуара, найденного в его бумагах *), видно, что выражения для числа классов, данные Дирихле в его знаменитом мемуаре: Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à'la theorie des nombres (1837), были найдены Гауссом еще в 1801 г. Отрывок Гаусса не дает полного доказательства, но он интересен тем, что касается в значительной степени элементарного геометрического вопроса определения площади круга. Гаусс при этом применяет обыкновенную методу, состоящую в том, что фигура покрывается сетью квадратов с уменьшающимися по величине площадками и затем сосчитывается число этих площадок. Минковский называет эту методу *микроскопическою*. Методу Дирихле можно

*) Werke Bd. II.

напротив, назвать *микроскопической*. Исследуемая фигура непрерывно расширяется равномерно во всех направлениях, исходя из некоторой неподвиж-

Густав Лежен Дирихле (1805—1859).

ной начальной точки, и для каждой узловой точки замечается, при каком отношении увеличения она находится на контуре фигуры. Сумма обратных

значений полученных таким образом чисел увеличения для всех узловых точек была бы безконечна; но если вместо обратных значений мы возьмем s-тые степени их, то приходим к некоторой функции от (s), вполне характеризуемой первоначальною фигурою. Эта функция (s) допускает аналитическое продолжение на всю плоскость комплексной переменной, но для $s = 1$ обращается в безконечность 1-го порядка; соответствующий интегральный вычет дает величину площади фигуры.

Дирихле распространил позже свои исследования на квадратичные бинарные формы, которых коэффициенты суть комплексные числа Гаусса. И в этой более общей теории вопрос сводится к исследованию аналогичных рядов; ряды, введенные Дирихле, справедливо носят его имя, и его исследования по теории сходимости рядов являются наравне с работами Абеля и Коши основными в учении о рядах. После этих работ стало невозможным то бездоказательное пользование рядами, которое характеризует работы Эйлера. Это влияние исследований в области теории чисел на один из важнейших отделов анализа составляет один из наиболее замечательных примеров той глубокой связи, которая существует между двумя отделами чистой математики, повидимому столь различными.

Другой вопрос аналитической теории чисел, который также имеет большое значение, есть вопрос об определении средних значений числовых функций. В нашем историческом очерке мы встретились уже с некоторыми важными числовыми функциями, например, с функциею Эйлера $\varphi(m)$, выражающею число чисел взаимно простых с числом m и меньших m и с функциею $f(n)$—суммою делителей числа n; в следующей главе читатель познакомится с числовою функциею Ч (n), выражающею число чисел абсолютно-простых и меньших n. Теория числовых

функций, к которым можно причислить также и функцию E(x), т. е. наибольшее целое число, заключающееся в x, представляет интересный отдел чистой математики, развитие которого, по справедливому указанию Чезаро, тесно связано с дальнейшими успехами высшей арифметики. К сожалению, недостаток времени не позволяет нам познакомить читателя даже в самом беглом очерке с многочисленными работами в этой области Мебиуса, Лиувилля, Мертенса, Липшица, Гегенбауера, Чезаро и мн. др. Из русских математиков в этой области работали В. Я. Буняковский, П. Л. Чебышев, Н. Я. Сонин, Н. В. Бугаев. Последний в ряде многочисленных работ приложил к систематизации учения о числовых функциях введенные им понятия о числовой производной, об интеграле числовой функции по всем числам и об интеграле по делителям.

Важность вопрса об определении средних значений числовой функции объясняется неправильностью, характеризующею вообще ход числовых функций. Так, например, значениям чисел от 100 до 107 соответствует следующий ряд значений числовой функции Эйлера:

100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107,
40, 100, 32, 102, 48, 48, 52, 106.

Еще большую неправильность представляет ход числовой функциии, выражающей число делителей; значения этой функции, вообще довольно большие, для простых чисел равны двум. Отсутствие правильности в изменении значений числовых функций, приводит к убеждению, что такие числовые функции не могут быть точно представлены функциями анализа. Но в то же время естественно является вопрос, не выравниваются ли эти неправильности арифметической функции при рассмотрении весьма

большого ряда следующих одно за другим значений функции, и не может ли таким образом быть раскрыт истинный закон изменения числовых функций. Постановка и первые примеры решения этого вопроса даны Гауссом в Disquisitiones (§ 301—305) для числа родов и классов бинарных квадратичных форм отрицательного определителя, без указания на методы решения. Такие указания были в первый раз даны Дирихле в мемуаре: „Об определении средних значений в теории чисел" (1849 г. Werke. Bd. II s. 51). Средним значением числовой функции f (x) в интервале от 1 до n Гаусс и Дирихле называют

$$\frac{f(1) + f(2) + \ldots + f(n)}{n}$$

Предел этого выражения для $n = \infty$ или среднее значение функции f (x) обозначаемое Mf(x), дает вместе с тем очевидно ассимптотическое выражение суммирующей функции $F(n) = f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$. Метод Дирихле, основанный на свойствах функции E (x), *) дает возможность оценить верхний предел ошибки ассимптотической формулы. Вороной в мемуаре Sur un problème du calcul des fonctions asymptotiques (Crelle's, Journ. 126) развил новый метод, дающий предел погрешности значительно меньший, чем получается по способу Дирихле. **) Не имея возможности войти в большие подробности относительно этих исследований, ограничусь только приведением одного примера. Выше было

*) Функция E (x), которая может быть названа получисловою, так как переменные могут принимать все вещественные значения, была предметом многих исследований в том числе В. Я. Буняковского, Н. В. Бугаева, Н. Я. Сонина и Г. Ф. Вороного.

**) Отметим также работу И. М. Виноградова (Изв. Петерб. Акад. 1917 г.), в которой между прочим в первый раз в полном объеме доказано ассимптотическое выражение Гаусса для суммы числа классов собственно примитивных форм.

Георгий Феодосьевич Вероной (1963—1908).

указано на крайнюю неправильность числовых функций—числа делителей некоторого числа. Дирихле нашел для этой функции b_n ассимптотический закон суммы $b_1 + b \cdot \ldots + b_n$ под видом $\left(n + \frac{1}{2}\right) \log n \quad n + 2Cn$, где C есть известная Эйлерова постоянная 0,577215..., и ассимтотический закон для b_n под видом:

$$\log n \cdot 2C$$

Для $n = 100$ действительное значение суммы $b_1 + + b_2 + \ldots + b_n$ есть 482; ассимпитотическая формула дает 478, 2; для $n = 2000$ соответствующие числа суть 1098 и 1093,2.

Вопросы нами рассмотренные представляют простейшие примеры из обширной области аналитической теории чисел. Отсылая читателя к единственному сочинению, излогающему систематически некоторые части этой теори (Bachmann. Die analytische Zahlentheorie. Leipz. 1894), мы ограничимся приведением еще некоторых вопросов этой теории. Кронекер приложил аналитические методы к получению теорем теории композиции форм, выведенных Гауссом арифметическим путем. Дедекинд по образцу исследований Дирихле о числе классов бинарных квадратичных форм вывел формулу для выражения числа классов идеалов произвольного алгебраического тела с помощью обобщения того безконечного ряда, который послужил Эйлеру для доказательства безконечности числа простых чисел. Связь, которая существует между простейшими аутоморфными функциями (эллиптическими и модулярными) и теориею чисел может быть обобщена, как показали исследования Пуанкаре об арифметических инвариантах и о приложении аутоморфных функций к арифметике. Наконец в исследованиях Вебера по теории комплексного умножения эллиптических

функций выясняется значение 65 удобных чисел Эйлера. Но вопросы, которые интересовали Эйлера при изучении этих чисел (см. главу VII), еще ждут решения.

§ 3. Арифметические вопросы в анализе.

Та тесная связь, которая существует между геометриею и анализом, проявляется с одной стороны в представлении геометрических протяжений аналитическими выражениями (аналитическая геометрия) и многообразными приложениями анализа к вопросам метрической геометрии (дифференциальная и интегральная геометрия). Но она проявляется также и обратно в том влиянии, которое геометрия имеет на развитие многих отделов чистой математики. В § 1 мы говорили о теории аутоморфных функций, которая существенным образом основана на изучении геометрических свойств линейных преобразований и на разделении плоскости комплексного переменного на безконечное множество круговых треугольников. Не меньшее значение приобретают геометрические представления и в теории дифференциальных уравнений благодаря работам Клебша (связь теории коннексов и особенных решений) и Софуса Ли. При той тесной связи, которая существует между высшею арифметикою и анализом, мы должны точно также ждать наравне с аналитическою теориею чисел и обратно—развитие влияния арифметических точек зрения на анализ и расширение приложения целых чисел к изучению математического континуума, т. е. области вещественных и комплексных чисел. В истории математики в XIX столетии мы действительно можем встретить и то и другое. Влияние арифметики проявляется в анализе через посредство теории конечных групп, в которой свойство числа (порядка группы) имеет громадное значение.

Мы уже имели случай указать, что современная высшая алгебра основывается на приложении абстрактной теории групп к группам перемещений букв и этим объясняется значение высшей арифметики для высшей алгебры.

Подобный же пример представляет теория преобразования эллиптических функций, совпадающая с теориею групп линейных преобразований $Z = \frac{az + b}{cz + d}$, при чем a, b, c, d – суть целые числа, связаныя условием $ab - cd = n$. Свойства целого числа n определяют характеристические свойства соответствующего преобразования.

Оба упомянутые вопроса — вопросы сравнительно новые, один из них ведет свое начало от Лагранжа и Галуа, другой вопрос в общем виде поставлен Якоби. К этим двум вопросам прибавим и третий, связанный с именами математиков, которыми гордится русская наука, вопрос об интегрировании в конечном виде интеграла $\int \frac{(x + A)\,dx}{\sqrt{a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4}}$, решенный Чебышевым для случая, когда коэффициенты суть рациональные числа и сведенный Золотаревым в общем случае, когда коэффициенты суть числа вещественные, к применению общей теории целых алгебраических чисел. Наряду с этими новыми вопросами не переставал и не перестает занимать внимание ученых, разрабатывающих теорию чисел, и другой вопрос—вопрос о приближенном выражении иррациональностей через дроби, т. е. через пару двух целых чисел, вопрос, который занимал Теона Смирнского и Архимеда (см. главу III) и который позже привел Гюйгенса к созданию теории непрерывных дробей. В приложении этой теории к вопросам о приближении к иррациональностям и в стремлении обобщить алгорифм непрерывных дробей мы можем отметить наравне с именами Лагранжа

Якоби, Эрмита, Кронекера, Минковского, имена Чебышева, Вороного и А. А. Маркова.

Вопросы этого рода принадлежат часто к вопро-

Егор Иванович Золотарев (1847—1878).

сам, которые, по выражению Чебышева, ставит нужда (Гюйгенс развивал теорию непрерывных дробей, желая усовершенствовать построение зуб-

чатых колес), но значение их выходит далеко за пределы практического приложения. Теория приближенного выражения иррациональностей привела Якоби к доказательству одной из самых важных истин теории функций: *функция от одной комплексной переменной не может иметь более двух периодов.*

Приведем еще два примера арифметических вопросов, к решению которых приводятся задачи теории функций. Эйзенштейн и Гейне дали замечательную теорему, определяющую арифметический характер коэффициентов разложения в строку алгебраической функции. На основании этой теоремы Ландау (1904) вывел условия, при которых автоморфная функция, определяемая гипергеометрическим уравнением, есть функция радиональная. Вопрос этот был предметом знаменитого мемуара Шварца (1873) *). Арифметическим путем Эррера (1913) показал, что условия Шварца не только необходимы, но и достаточны. Мемуар Эрмита (1855) о преобразовании Абелевых функций основан на арифметической теории систем чисел (матриц), которой начало положено Гауссом (в теории композиции форм), и которая позже была предметом исследований Эйзенштейна, Смита, Кэли, Фробениуса и др.

XIV.

Mysteria maxime recondita.

Admiratio generat questionem,
questio — investigationem,
investigatio — inventionem.

§ 1. Проблема простых чисел.

Несмотря на тесную связь между высшею арифметикою — учением о прерывном — и анализом —

*) Werke Bd. II.

учением о непрерывных величинах, несмотря на взаимные услуги ими друг другу оказываемые, высшая арифметика отличается от анализа и постановкою своих задач и методами их решения. Эти особенности высшей арифметики, отражающиеся во всех ее исследованиях, привлекали к ней многих гениальных математиков; они вызвали то высокое научное воодушевление Фермата, Эйлера, Лагранжа и Лежандра, которых Гаусс называет, „людьми несравненной славы, потому что они открыли путь к святыне этой божественной науки и показали, какие богатства в ней скрываются". Особенности эти заключаются в простоте ее оснований, в точности ее понятий и в ясности ее истин. Особенную заманчивость придает высшей арифметике только ей присущая особенность, что многие ея истины просто и легко открываются путем наблюдения и индукции (напомним наблюдения над удобными числами Эйлера, назвавшего один из своих мемуаров: „De usu observationum in mathesi pura)" и в то же время представляют большие трудности для доказательства. Именно это, говорит Гаусс в другом месте, придает высшей арифметике „ту волшебную прелесть, которая сделала ее любимою наукою величайших геометров." Действительно, арифметика почти единственный отдел математики, в котором мы встречаемся с широким применением индукции, основанной на наблюдении. С другой стороны именно история теории чисел представляет поразительные примеры трудности, с которого доказываются повидимому простые истины. Такой пример представляет определение знака суммы, известной под именем суммы Гаусса. „В течение четырех лет, пишет Гаусс Ольберсу в 1805 г., редко проходила неделя, в которую я не делал бы той или другой попытки развязать этот узел. Но все старания, все усилия были тщетны,

печально я клал перо. Но недавно это удалось „bloss durch die Gnade Gottes": загадка разрешилась с быстротою молнии и легко... и когда я изложу этот вопрос, никто не будет в состоянии представить себе, какого напряжения стоило мне это решение".

Теория чисел представляет и теперь много положений, до сих пор ни доказанных, ни опровергнутых, в то же время простота этих положений приводит к убеждению, что метод, которым какое-либо из этих положений будет доказано или опровергнуто, будет в том и в другом случае методом, открывающим нам новые широкие пути исследования. Одним из таких таинственных по своей простоте и в тоже время до сих пор недоступным положением является положение, известное под названием теоремы Гольдбаха*), по которой всякое четное число есть сумма двух абсолютно простых чисел. Знаменитый создатель теории множеств, Георг Кантор, проверил это положение на всех числах до 3000. Столь же просто и ясно положение, высказанное князем Полиньяком: „всякое простое число есть разность двух простых чисел". Все вообще вопросы, связанные с рядом простых чисел, полны загадочности и давно уже привлекают внимание математиков. Эйлер в 1760 году (XXV. De numeris primis valde magnis) писал, что едва ли найдется математик, который не потерял бы безполезно много времени, стараясь проникнуть в закон порядка распределения простых чисел между натуральными, и сравнивает этот вопрос с квадратурою круга.

С того времени, когда Эйлер написал эти слова, выдающиеся математики направили свои усилия на выяснения закона убывания частности простых чисел: Что эта частность или плотность убывает, по-

*) См. о ней главу IV, стр. 111.

казывают нам прежде всего находящиеся в нашем распоряжении таблицы простых чисел в первых девяти миллионах *).

Благодаря замечательным формулам Мейсселя**) мы имеем возможность определить действительное число простых чисел далеко за пределами этих таблиц. И таблицы и формулы Мейсселя указывают на постоянно уменьшающуюся плотность простых чисел. Число простых чисел в первом миллионе равно 78.499, во втором 70.433, в девятом—62.760, в первой сотне миллионов 5.761.460 т.-е. плотность равная для первого миллиона 781499—для первой сотни миллионов равна 57,614. Но правильность, с которою по таблицам число простых чисел уменьшается от одного миллиона к следующему, уменьшается, если мы будем рассматривать меньшие интервалы. Так для интервалов в полмиллиона число простых чисел не уменьшается постоянно при переходе от одного полумиллиона к следующему: в интервале между 8.500.000 и 9.000.000 число простых чисел равно 31.396, между тем как в предыдущем полмилльоне (8.000.000 — 8.500.000) их на 32 числа меньше. Еще большая неправильность обнаруживается, если мы будем рассматривать меньшие интервалы. В введении

*) Первые таблицы простых чисел были изданы в середине XVII столетия Шутеном и Пеллем и доведены были только до 100.000. В XIX веке изданы таблицы Буркгарда, дающие простые числа и делители сложных до 3.036.000 и таблицы Дазе, заключающие в себе числа от 6.000.000 до 9.000.000 По поручению Комитета Британской ассоциации, состоявшего из Кэли, Стокса, В. Томсона (лорда Кельвина), С. Смита и Глешера, последний издал в 1879 и 1883 г. таблицы простых чисел и делителей для четвертого, пятого и шестого миллионов.

**) Формула Мейсселя приведена в „Введении в анализ", вып I. Мемуары Мейсселя помещены в Mathemat. Annalen том 2 и 3.

к таблицам простых чисел в шестом миллионе Глешер дает интересные таблицы, которые для каждой сотни тысяч указывают число сотен, заключающих в себе определенное число абсолютно-простых чисел. Так, например, для интервала между 8.900.000 и 9.000.000 мы имеем следующую таблицу, в которой вторая строка дает число тех сотен рассматриваемого интервала, в которых число простых чисел равно соответствующему числу первой строки:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4	13	53	117	177	196	175	130	72	47	11	4

Общий характер наблюдаемого и изучаемого нами эмпирически явления (распределения простых чисел между сотнями натуральных чисел) сходен с характером всех случайных явлений и подобно им подчинен закону больших чисел. Представим себе, что мы имеем 6270 равных шаров и, бросая, стараемся равномерно распределить между 1000 ящиками. Мы найдем, что наибольшее число ящиков будет содержать 6, 7, 5, 8, 4 шаров, наименьшее — или слишком мало (0, 1, 2) или слишком много (11, 12). Но именно такое распределение и дает нам выше помещенная таблица. Аналогичная таблица *) показывает, что в 9 миллионах существует 16813 сотен, заключающих в себе по 6 простых чисел, 16901 сотен, заключающих 7 простых чисел и в то же время 9 сотен, заключающих в себе 16 простых чисел, по одной сотне, заключающих в себе 25 и 21 простое число и 24 сотни не заклю-

*) См. „Введение в Анализ", вып. 1.

чающих ни одного простого числа. Наименьшая из таких сотен начинается с числа 1.671.800. Наиболее длинные промежутки, не содержащие ни одного простого числа суть промежутки в 153 и 151 число (4.652.353—4.652.507 и 8.421.251—8.421.403). С другой стороны на всем протяжении 9 миллионов встречаются пары двух смежных нечетных чисел, состоящие из абсолютно-простых чисел, как например 5.971.847 и 5.971.849. Таких пар в интервалле между 0 и 100.000—1225; в интервалле между 8.000.000 и 8.100.000—518. Число таких пар, очевидно, убывает, но прекратятся ли когда нибудь такие пары в безконечно далеко простирающемся ряде простых чисел—вот один из тех загадочных вопросов, которые ставит эмпирическое изучение ряда простых чисел.

Закон убывания плотности простых чисел и соответствующий ему интегральный закон, т. е. числовая функция Ч (N), выражающая число простых чисел меньших N, были предметом исследований знаменитых математиков; целью этих исследований было нахождение для Ч (N) ассимптотического выражения, т. е. функции от N, выраженной с помощью символов анализа, которой отношение к функции Ч (N) стремится к 1, если N безпредельно возрастает. Розыскание подобных ассимптотических выражений имеет большое значение в теории вероятностей, — выводы которой имеют значение только для больших чисел. Известно, какое значение имеет для вывода закона больших чисел ассимптотическая формула для произведения 1.2.... N, найденная Стирлингом.

Первая ассимптотическая формула для Ч (N) и вместе с тем первая ассимптотическая формула теории чисел была опубликована Лежандром в „Essai sur la théorie des nombres (1798 г.); по этой формуле число простых чисел меньших N приближенно вы-

ражается дробью $\frac{N}{\log N - 1{,}08366}$

Вопрос о плотности простых чисел был первым вопросом, заинтересовавшим Гаусса, как он пишет Энке, еще в 1792 или 1793 г.г., 24 декабря 1849 г., *) т. е. когда ему еще не было 16 лет. Рассматривая таблицу простых чисел, он пришел к убеждению, что количество простых чисел убывает пропорционально логарифму верхнего предела или иначе, средняя плотность приблизительно обратно пропорциональна логарифму, откуда вытекает закон для функции Ч (N):

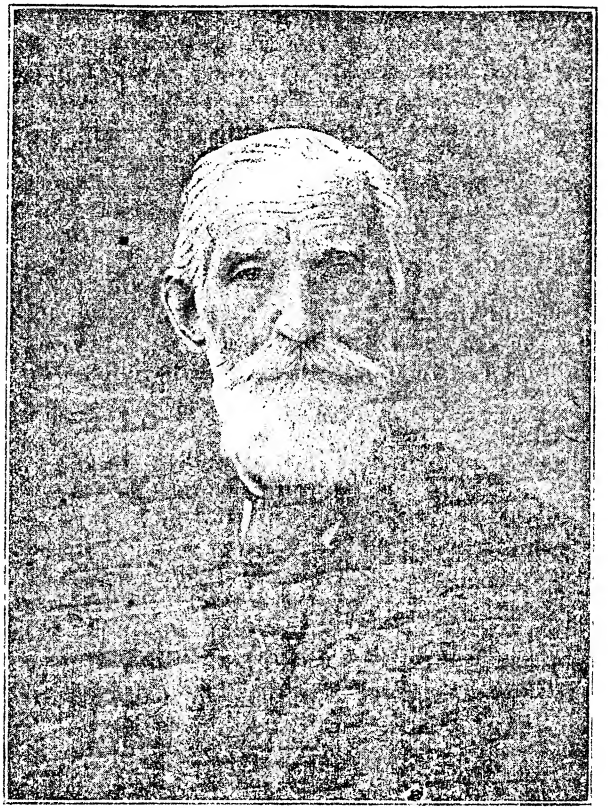
$$Ч\ (N) = \int_{2}^{N} \frac{dx}{\lg x}$$

Интеграл, который встретился в этом вопросе теории чисел, носит название логарифм-интеграла и обозначается большею частью знаком li.

Около того же времени в 1796 г., как видно по заметкам Гаусса, набросанным на одной из его книг, он нашел и ассимптотическое выражение $\frac{N}{\lg N}$, которое вполне строго было доказано только сто лет спустя Гадамаром и Лавалле-Пуссеном по пути, проложенному Риманном Но и Лежандр и Гаусс повидимому при выводе своих результатов ограничивались индукциею и не имели аналитического метода для доказательства. „Первый после Эвклида, кто пошел правильным путем для решения проблемы о простых числах и достиг важных результатов, был Чебышев", так оценивает значение нашего знаменитого соотечественника в этой области автор специального трактата, посвященного теории распределения простых чисел, Ландау (Die Lehre von der Vertheilung der Primzahlen. 1909 г.).

*) Werke, Bd. II.

Обе работы Чебышева, посвященные теории простых чисел, поражают: первая об определении числа простых чисел, не превосходящих данной величины



Пафнутий Львович Чебышев (1821—1894).

1849 (в приложении к теории сравнений *) тонкостью анализа (входящие в нее определенные

*) Сочинения Чебышева. Том I, стр. 27.

интегралы только постоянными множителями отличаются от Риманновой функции $\zeta(s)$), вторая (Sur les nombres premiers, 1852), *) напротив, элементарностью своей исходной формулы, которая, однако, благодаря остроумнейшим соображениям дает важные результаты. Употребляя термины созданной Вейерштрассом теории функций от вещественной переменной, в первой своей работе Чебышев доказал, что с одной стороны верхний предел отношения $\frac{\Psi(x)}{\frac{x}{\lg x}} \geqslant 1$, а наименьший предел того-же отношения $\leqslant 1$. Во второй работе, обратившей на себя внимание доказательством так называемого постулатума Бертрана. **) Чебышев показываетъ, что нижний предел $\geqslant 0.92129$, а верхний предел $\leqslant 1.1055$. Доказать, что нижний предел $\geqslant 1$, а верхний предел $\leqslant 1$, другими словами доказать, что пред. $\frac{\Psi(x)}{\frac{x}{\lg x}}$ равен единице при $x = \infty$ — такова была задача, которую нужно было решить после Чебышева. Сильвестр в 1881 г. предлагал для дальнейших успехов теории чисел ждать, пока родится некто настолько же превосходящий Чебышева своею проницательностью и вдумчивостью, насколько Чебышев превосходил этими умственными качествами обыкновенных людей. Решение задачи, к которому почти подошел Чебышев, стало возможным после того, как Риманн, этот гениальный математик, ввел в теорию простых чисел функцию $\zeta(s)$, представляемую безконечною дробью $1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \ldots\ldots$ Анализ Риманна дал ему воз-

*) Там же стр. 49.

**) Если $a > 7$ то между a и $2a - 2$ всегда существует простое число. На этом постулатуме Бертран основал доказательство одной теоремы теории групп перемещений.

можность показать, какое громадное значение функция $\zeta(s)$ имеет в теории простых чисел. Но в этом замечательном анализе остаются еще некоторые подробности, изучение которых должно разъяснить, например, то местами встречающееся сгущение простых чисел, которое дает нам эмпирическое изучение таблиц.

После этого подробного изучения формулы Римана, говорит Гильберт в своей речи на 2-м международном Парижском Конгрессе, может быть удастся дать точный ответ на задачу Гольдбаха и на вопрос о том, существует ли безконечное множество пар простых чисел с разностью, равною 2 и наконец на еще более общий вопрос: всегда ли разрешимо в простых числах x и y линейное уравнение Диофанта

$$ax + by + c = 0$$

где a, b, c суть целые числа и первые два суть числа взаимно-простые.

На пятом международном Конгрессе 1912 г. Ландау прибавил еще два другие, решение которых также представляется весьма трудным: 1) представляет ли функция n^2+1 при целых значениях n безчисленное число простых чисел и 2) лежит ли между n^2 и $(n+1)^2$ при всяком целом числе n по крайней мере одно простое число.

§ 2. Последняя теорема Фермата.

Второй вопрос, на котором мы остановим внимание читателя—та „последняя теорема Ферма та", о которой мы не раз говорили в предыдущих главах. Она формулирована была Ферматом в следующих выражениях: „Cubum autem in duos cubos aut quadrato-quadratum et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est dividere; cuius rei demonstrationem

mirabilem sane detexi. Hanc marginis exeguitas non caperet".

Это доказательство, не помещенное Ферматом только по недостатку места на полях, до сих пор не найдено и, как говорит Люка, остается вызовом человеческому разуму.

Но теорема Фермата вызвала в течение XVIII и XIX века многие попытки к ее доказательству. Сам Фермат указал на метод ея доказательства в случае биквадратов. Эйлер воспользовался тем же методом для доказательства, что сумма двух кубов не может быть кубом (Elements d' Algébre vol. II, sec III; оно помещено также во втором томе „Théorie des nombres" Лежандра).

Невозможность решения уравнения $x^n + y^n + z^n = 0$ была затем доказана для $n = 5$ Лежандром (Théorie des nombres, vol II) и Дирихле, для $n = 14$ также Дирихле, и для $n = 7$ — Ламе.

Но методы, употребленные в этих работах, равно как и небольшой мемуар Абеля, приспособлены исключительно к частным случаям и не дают путей к общему исследованию. В 1847 г. Ламе представил Парижской Академии общее доказательство теоремы Фермата, основанное на предложении, что комплексное число, зависящее от корня уравнения $x^l = 1$ может быть представлено единственным способом под видом произведения степеней комплексных простых чисел. На этот недостаток указал тотчас-же Лиувиль и обсуждение этого вопроса в заседании Парижской Академии привлекло к теореме Фермата внимание Коши и вызвало целый ряд его мемуаров, посвященных теории целых комплексных чисел или „радикальных полиномов", как их называет Коши. В первых мемуарах Коши пытается доказать неверное предложение что и для общих комплексных чисел, как и для чисел Гаусса (см. гл. X) норма остатка при делении одного

комплексного числа на другое может быть сделана менее нормы делителя. Позже он принимает это предложение, как постулатум, и наконец признает

Яков Бернулли (1661–1704).

и доказывает его неверность. Данные им позже интересные теоремы заключаются как частные случаи в общей теории Куммера. В числе этих теорем Коши находится и теорема, связывающая неожи-

данно теорему Фермата с рядом дробей-коэффициентов в разложении сумм степеней последовательных натуральных чисел: $1^m + 2^m + \ldots + n^m$ по степеням n. Эти замечательные дроби были введены в анализ знаменитым творцом закона больших чисел Яковом Бернулли и носят название Бернуллиевых чисел.

Общая теория Куммера, основанная на введении идеальных чисел, дала ему возможность доказать теорему Фермата для всех показателей, которые суть „правильные" числа. Куммер называет правильным числом нечетное простое число λ, если оно не входит множителем ни в один из числителей первых $\frac{\lambda-3}{2}$ Бернуллиевых чисел. *)

Таблица чисел Бернулли показывает, что в пределе первой сотни существует только три неправильных числа λ: 37, 59, 67. Так 37 есть делитель числа 7709321041217, числителя шестнадцатого Бернуллиевого числа B_{16}; точно также 59 есть делитель числителя B_{22} и 67 делитель числителя (заключающего 35 цифр) B_{29}

На основании особых исследований Куммер доказал, что теорема Фермата имеет место и для трех „неправильных" чисел. Но общего доказательства теоремы Куммера до сих пор не дано, и по-прежнему остается загадкою, имел ли Фермат доказательство, о котором он писал. В 1909 г. по духовному завещанию Вольфскеля, Геттингенское Общество получило капитал в 100.000 марок, который должен быть выдан лицу „доказавшему теорему Фермата или в общем виде или для тех случаев, когда она справедлива." Сотни ошибочных доказательств лиц, незнакомых с трудностью вопроса, по-

*) Такая таблица дана, наприм., проф. Граве в его „Элементарном курсе теории чисел" Киев, 1913 г.

сыпались в общество. Но в последнее время достигнуто и несколько серьезных результатов, относящихся к этой теореме. Так Виферих доказал в высшей степени интересную теорему:

„если $x^p + y^p + z^p = 0$ (мод p), решается во взаимно-простых с p числах (p есть простое число), то

$$\frac{2^{p-1}-1}{p} \equiv 0 \text{ (мод p)}$$

Теорема Вифериха обратила внимание на число $q(a) = \frac{a^{p-1}-1}{p}$ (частное Фермата). Фробениус дал (1909 г.) упрощенное доказательство этой теоремы; Мириманов и Вандивер нашли теоремы аналогичные теореме Вифериха, по которым, если уравнение $x^p + y^p + z^p = 0$ решимо в целых числах, то q (3) и q (5), также как и q (2), сравнимы с нулем по модулю p *). Арифметические свойства Бернуллиевых чисел, наприм., теоремы Штаудта и Адамс—Вороного представляют большой интерес (см. упомянутый курс проф. Граве).

XV.

Теория чисел и математическое природоведение.

Die Natur sei meine Göttinn
Deinen Gesetzen mein Leben
geweiht.
Гаусс.

В речи, произнесенной при открытии съезда Британской Ассоциации в 1913 г. на тему о непрерывности, Лодж говорит, что физические споры нашего времени в значительной степени вращаются около вопроса: кому будет принадлежать окончательная победа в битве между прерывностью и непрерыв-

*) См. Crelle' s Journ. Bd. 128, 13

ностью. Но этот спор не есть только спор настоящего времени. Его начало совпадает с началом философии природоведения и математики. Мы видели в начале нашего очерка, что *прерывный* ряд целых положительных чисел был для философов Пифагорейской школы более чем символом; он казался им основою явлений и притом явлений не только мира материального, но и мира духовного. Изучение геометрии привело к введению математического континуума, состоящего из вещественных чисел (рациональных и иррациональных) и в результате продолжительной работы мысли (см. главу VI) анализ безконечно малых, основанный на понятии о непрерывном числе и функциональной зависимости между рядами непрерывных чисел, дал возможность подчинить математическому исследованию явления природы, совершающиеся в непрерывном пространстве и в непрерывное время. Ряд целых чисел по-видимому потерял свое значение и наука о целом числе считалось одно время синонимом „problèmes plaisants et delectables". Во многих своих арифметических мемуарах Эйлер начинает с извинения и оправдания, что он занимается вопросами, кажущимися ненужными многим математикам. Гаусс и Дирихле жаловались на отсутствие интереса и понимания проблем теории чисел. Позже Ламе говорит о многочисленных „détracteurs de la théorie des nombres" и даже в 1905 г. в речи, посвященной памяти Дирихле, Минковский только от будущего ждет признания громадной важности арифметических исследований.

Но спор между прерывным и непрерывным проходит не только через историю математики, но и через всю историю физики и химии. В истории теории вещества нет вопроса более важного, чем спор между плеротизмом и атомизмом, т.-е. спор по вопросу о том, состоит ли материя из дискрет-

ных частиц или наполняет сплошное пространство. Этот спор велся еще в греческой философии на страницах Физики и „De Coelo" Аристотеля, опровергавшего атомизм Демокрита *). Он велся и в индийской философии между материализмом Канады и спиритуализмом Шанкары. Он возгорался снова в эпоху возрождения, и еще недавно наше поколение пережило и „преодоление научного материализма" и обращение Савла-Оствальда к атомизму, благодаря открытиям в области электронной теории, теории коллоидов, лучистой энергии и кристаллографии. „Молекулярная реальность является лозунгом настоящего." То или другое отношение к прерывности и непрерывности в теории вещества имело несомненно влияние и по отношению физико-химических наук к теории чисел.

Те простые численные отношения, в которые, на основании закона Рихтера и Дальтона 1803, вступают в химические соединения простые тела, побуждали искать связь между теориею чисел и химиею.

На аналогии между сферою понятий химии и учением о целых числах настаивал Куммер. Простые множители соответствуют простым телам химии, идеальные простые множители тем гипотетическим радикалам (таким гипотетическим элементом был до 1886 г. фтор), которые еще не выделены, но которые, подобно идеальным числам, проявляются в составе сложных тел. Даже понятие об эквивалентности почти то же самое, как и в теории комплексных чисел. В химии два весовых количества разных тел называются эквивалентными, если они взаимно

*) С этим спором всего лучше познакомиться по не раз упомянутому нами сочинению Лассвица. Прекрасное изложение взглядов Аристотеля находим в Système du monde покойного Дюгема. Интересно отметить, что в числе многочисленных работ, посвященных Демокриту, находится докторская диссертация Карла Маркса.

замещают друг друга при процессе нейтрализации или в изоморфных смесях. Точно также и два идеальных числа являются эквивалентными, если они при превращении другого идеального числа в вещественное заменяют друг друга. Все эти аналогии, пишет Куммер, нельзя считать случайными; причина их заключается в том, что *химия и теория чисел* имеют своим предметом и основным началом хотя в разных сферах бытия—одно и то же понятие о составе *).

Развитие химии за вторую половину XIX столетия привело к новым точкам соприкосновения между химиею и теориею чисел. Так учение об изомерии привела к вопросам комбинаторного анализа, изучение которого было предметом работ английских математиков: Кэли, Сильвестра, Клиффорда и др. Периодический закон Менделеева, основанные на корпускулярной теории гипотезы для его объяснения, формулы Мозелея, связавшия с рядом атомных чисел явления лучеиспускания химических элементов, заставляют также искать в свойствах ряда целых чисел объяснение важнейших положений химии.

Теория элементов действия (квант), проявляющаяся в химических явлениях, в которых массы могут взаимно действовать лишь в отношениях точно определенных, но изменяющихся скачками, **) является новым побуждением к введению в математическое природоведение методов учения о прерывном ряде целых чисел. В гармоническом синтезе учения о прерывном (теория квант) и учения о непрерывном (принцип наименьшего действия) современная физика ищет идеальный образ мира.

---

*) См. Crelle's Journ. Bd. 35 (847). Journal de Liouville vol. 16 (1851).

См. также в „Festschrift" Гензеля письмо Куммера к Кронекеру от 14-го июня 1846 г.

**) См. доклад Планка о законах черного лучеиспускания и теории квант на Брюссельском конгрессе 1911 г.

возможность решения „мировых загадок". Одним путем это решение не достигается; говоря словами средневекового алхимика-искателя философского камня: „uno itinere non potest pervenire ad tantum grande secretum".

Но если связь между теориею целого числа и химиею не вышла еще из стадии аналогий и отдельных примеров математической обработки химических вопросов, то один из важнейших отделов теории вещества—учение о кристаллах, этих „каплях" твердого тела, благодаря работам Браве, Зонке, Жордана, Е. С. Федорова и Шенфлиса может быть рассматриваем как отдел математики и связан в особенности тесно с теориею групп и с теориею целых чисел. Распределение точек-молекул, из которых состоит кристалл должно быть однородно, т.-е. повторяться одинаковым образом в пространстве, и поэтому одна из задач кристаллографии состоит в том, чтобы найти все способы разбить пространство на отдельные многогранники, которые займут его без промежутков. Задача о выполнении пространства трех измерений „параллелоэдрами" была решена Е. С. Федоровым, который доказал, что существует конечное число разновидностей параллелоэдров и показал их значение для теории структуры кристаллов.*) Тот же результат был найден на основании теории групп перемещений Шенфлисом.**) С точки зрения теории групп исследования Федорова, Шенфлиса и Рона ***) равно-

*) Начало учения о фигурах. 1885 г. Regulâre Plan-und Raumteilung (Abhand. der K. bayer. Akad. d. W. München XX Bad. 1899).

**) Krystalesysteme und Krystallstruktur Leipzig. 1891.

***) Math. Ann. Band. 58.

См. также в высшей степени замечательный мемуар Фробениуса (Berl. Ber. 1911), в котором знаменитый Берлинский математик выводит 32 класса кристаллов из теорем своей теории групповых характеров.

сильны доказательству, что в Евклидовском (параболическом) пространстве существует только конечное число существенно различных групп перемещений с фундаментальною областью. Фундаментальная область каждой группы перемещений вместе со всеми областями, получаемыми из нея с помощью всех перемещений группы и приводит к выполнению пространства. В 1900 г. на Парижском международном Конгрессе Гильберт поставил в числе „Математических проблем" — вопрос: „Существуют ли многогранники, которые, не будучи фундаментальными областями группы перемещений, позволяют тем не менее выполнить без промежутков все пространство" и ставит в связь с этим вопросом, важным для теории чисел с одной стороны, для физики и химии с другой стороны и вопрос о том, как можно выполнить пространство с возможно большею плотностью посредством бесконечного числа тел данной формы, например, шаров данного радиуса; другими словами требуется разместить эти тела в пространстве так, чтобы отношение наполненного пространства к пустому было возможно больше. На значение этого вопроса для теории структуры кристаллов указал в своих Балтиморских лекциях по молекулярной динамике Лорд Кельвин*)

В 1904 г. вопросу, поставленному Гильбертом. Минковский посвятил мемуар „о плотнейшем решетообразном расположении выпуклых тел", **) в котором показал значение вопроса для теории чисел. Изучение плотнейшего расположения шаров доставляет почти непосредственно все результаты данной Гауссом и Дирихле теории параллельных

*) Baltimore Lectures on molecular dynamics London. 1904 p. 618.

**) Werke Bd. II p 1—42. См также его реферат на 3-м международном Конгрессе в Гейдельберге: Zur Geometrie der Zahlen.

решеток, т.-е. теоремы арифметического приведения положительных бинарных квадратичных форм. С другой стороны изучение наиболее плотного расположения октаэдров доставляет теоремы, касающиеся совместного приближения к двум величинам с помощью рациональных дробей, имеющих один и тот же знаменатель *).

Та тесная связь, которая таким образом через задачу о выполнении пространства устанавливается между теориею вещества и теориею чисел, оправдывает ту уверенность, с которою Минковский говорил о приближении того времени, „когда самая изысканная арифметика будет торжествовать в области физики и химии, когда, например, окажется, что существеннейшие свойства вещества аналогичны с разложением простых чисел на сумму двух квадратов" **).

Тесная связь вопроса о приведении положительных квадратичных форм с вопросом о выполнении пространств n-измерений была также предметом чрезвычайно глубоких исследований покойного русского математика Г. Ф. Вороного.

Но не только в теории структуры вещества, но и в более сложных явлениях мертвой и живой природы мы встречаемся с вопросами, решение которых приводит к ряду чисел целых и к задачам учения о целом числе.

Учеными Пифагорейской школы было найдено гармоническое отношение между длинами колеблющихся струн, соответствующими музыкальной гармонии. Через 25 веков исследование с помощью

---

*) Мемуары Минковского собраны в двух томах изданных Гильбертом в 1911. Геометрии чилел посвящено не доконченное сочинение: Geometrie der Zahlen 1910.

Для первоначального ознакомления с своими методами Минковский напечатал: Diophantische Approximationen 1907.

**) Werke Bd. II. S. 451.

глубокого математического анализа колебаний упругой пластинки заставили Ламе выразить уверенность, что в будущем теория чисел сделается столь же необходимою для математической физики, как и анализ безконечно малых.

Современный кристаллограф находит в развитии форм кристаллов из нескольких первичных граней по *закону компликации*, объемлющему и закон рациональных кодексов и закон зон и закон постоянства гранных углов, проявление гармонических отношений между целыми числами *).

В начале главы XII мы говорили, что в ботанических работах по филотаксису (распределение листьев на стволах растений), естествоиспытатели встретились с плоскостными решетками; изучение этих решеток показало им зависимость филотаксиса от рядов целых чисел, связанных с простейшими непрерывными дробями. Ряд чисел, знаменателей подходящих дробей к непрерывной дроби $1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}$, ряд, который (см. глава VI) встретился Фибоначчи в задаче о кроликах, в ботанических работах, носит имя Брауна, первого ботаника, обратившего внимание на вопросы филотаксиса **).

Несомненно, что по мере развития природоведения оно будет ставить учению о целом числе —

*) Ст. V. Goldschmidt. Ueber Harmonie und Complication. 1907. Автор ищет аналогию между гармониею кристаллическихъ форм, музыкальных тонов, цвѣтов и связывает числовые отношения, найденныя им в кристаллографии, с теми числовыми отношениями, которые по закону Тициуса-Боде существует между расстояниями планет от солнца.

**) С вопросом о филотаксисе, а также и другим приложением теории решеток (к ткацкому делу) читатель может познакомиться в статье проф. Котурницкого: Квинкункс и его применения к естествознанию и ткацкому делу. (Известия технологического института за 1893 г.).

учению о прерывном, как и анализу непрерывного, новые задачи. В теории чисел оправдаются слова, которыми Фурье начинает свое прекрасное предисловие к „Théorie analytique de la chaleur“:

„Глубокое изучение природы есть наиболее плодотворный источник математических открытий“.

История учения о целом числе дает примеры подтверждающие мысль Фурье. Но рассматриваемая в целом эта история представляет собою победное шествие саморазвивающейся математической мысли, которая от двух и трех доходит до бесконечного ряда целых чисел, от равенства $3^2 + 4^2 = 5^2$ восходит к законам композиции квадратичных иррациональностей и от этих законов к общим законам произвольного алгебраического тела. И снова стоит перед нами вопрос об отношении между чистым „математическим“ и „варварскою грязью чувственного мира“, вопрос, который решал некогда в Афинских садах Академа великий греческий мудрец, неразрывно связывавший с этим вопросом дорогие для него вопросы об идеальном воспитании юношества и идеальном устройстве своего „Государства“.

Послесловие.

Не только ученые, знакомые с современным состоянием науки о целом числе, но и другие внимательные читатели заметят, что последния пять-шесть глав написаны в ином уменьшенном масштабе чем первые. Многое нужно было бы в них включить (первоначально предполагалось посвятить особыя главы вопросам почти совсем не затронутым в книге, как-то теории числовых функций, теории квадратных форм со многими переменными, теории последовательных максимумов и минимумов в связи с теориею непрерывных дробей и вопросом о приближенных значениях иррациональностей, теории единиц, аддитивной теории чисел.) Автор просит смотреть на конец книги, как на программу другой книги, которая должна полнее изобразить развитие теории чисел после Гаусса. Автор просит извинения у читателей, интерес которых не всегда будет удовлетворен и которым многое, по недостатку формул и отсутствию чертежей, по краткости изложения, останется, может быть, не понятным.

Но в свое оправдание автор должен указать с одной стороны на то состояние духовного и даже физического безпокойства, которое не мог не переживать весною и летом 1919 г., когда писалась эта книга, один из представителей русской интеллигенции (справедливость требует, впрочем, сказать, что автор не привлекался к выгрузке дров и даже получал „детский" паек), с другой на недостаток бумаги у издателей. Автор пользуется этим послесловием, чтобы выразить свою глубокую благодарность издателям за содействие и заботливость, столь тягостную при настоящем положении печатного дела, и проф. Я. В. Успенскому за его в высшей степени полезныя указания и советы и за его благожелательную критику.

С. Петербург. 1 окт 1919 г.

Список иллюстраций:

		Стр.
1.	Факсимиле 16-го и 17-го столбцов математического папируса Голенищева (XIX—XVIII до Р. Х.)	Впереди текста
2.	Вавилонская таблица квадратов и кубов	19
3.	Архимед (287—212 до Р. Х.)	36
4.	Таблица умножения из сочинения Никомаха „Изагоге“	39
5.	Франциск Виета (1540—1603)	8_6
6.	К. Г. Баше-де-Мезириак (1581—1603)	93
7.	П. Фермат (1601—1665)	95
8.	Леонард Эйлер (1707—1783)	11_2
9.	Жозеф-Луи Лагранж (1736—1813)	135
10.	Адриан Лежандр (1752—1833)	143
11.	Гаусс (1777—1855)	147
12.	Страница из дневника Гаусса	162
13.	Карл Якоби (1804—1851)	195
14.	Коши (1789—1857)	199
15.	Эрнст Куммер (1810—1893)	203
16.	Леопольд Кронекер (1823—1891)	207
17.	Стефен Смит (1826—1883)	215
18.	Шарль Эрмит (1822—1901)	217
19.	Герман Минковский (1864—1909)	219
20.	Анри Пуанкаре (1854—1912)	225
21.	Густав Лежен Дирихле (1805—1859)	233
22.	Г. Ф. Вороной (1868—1908)	237
23.	Е. И. Золотарев (1847—1878)	241
24.	П. Л. Чебышев (1821—1894)	249
25.	Яков Бернулли (1654—1704)	263

Оглавление.

Стр

Глава I. От одного и двух к бесконечности.
Генезис понятия о целом положительном числе.—Число у индусов.—Псаммит Архимеда. 3

Глава II. Числовая Мистика.
Математика у Египтян и в Вавилоне. — Школа Пифагора. — Платон. — Неоплатоники. — Пережитки числовой мистики в современной культуре. 14

Глава III. Начало науки о числах.
Школа Платона. — Аристотель. — Александрийская эпоха.—„Начала" Евклида.—Архимед и Аполлоний Пергийский. — „Изагоге" Никомаха Геразского.—Теон Смирнский. — 27

Глава IV. Диофант.
Арифметика Диофанта. 44

Глава V. Индусы 63

Глава VI. От Диофанта до Фермата.
Арабы. — Эпоха возрождения. — Леонардо Фибоначчи и Иордан. Неморариус.—Развитие практической арифметики. — Развитие алгебры и теории уравнений.—Обобщение понятия о числе. — Виета и Баше де-Мезириак. 76

Глава VII. Фермат и Эйлер.
Главнейшие теоремы Фермата.—Лейбниц.—Анализ работ Эйлера: А. I.) работы, примыкающие к работам Фермата; А. II) работы; примыкающие к работам Диофонта; Б) Но-

Стр

вые методы и новые задачи, данные Эйлером. 94

Глава VIII. Лагранж и Лежандр. . . . 133

Глава VIX. Гаусс.

Краткое содержание: „Disquisitiones arithmeticae".—Остальные работы Гаусса 146

Глава X. Основные идеи современной высшей арифметики.

§ 1. Распределение чисел на классы по модулю и операции над классами. — § 2. Особенные свойства классов 1 (числовой луч) и класса 0 (сдиочлен ный модуль). Многочленные модули. § 3. Распределение бинарных квадратичных форм на классы и композиция классов. — § 4. Классы в теории квадратичных иррациональностей.—§ 5. Основания теории целых целочисленных функций. § 6. Важнейшие понятия современной высшей арифметики 173

Глава XI. Арифметическая теория алгебраических чисел.

Исследования Куммера.—Теории Дедекинда и Кронекера. 189

Глава XII. Геометрия чисел.

§ 1. Точечные решения. Решетки на плоскости и в пространстве и теория бинарных и терпарных форм.—§ 2. Геометрия многих измерений 210

Глава XIII. Теория чисел и анализ.

§ 1. Инвариаты классов. Теоремы Кронекера. — § 2. Аналитическая теория чисел. — § 3. Арифметические вопросы в анализе . 222

Глава XIV. Mysteria maxime recondita.

§ 1. Проблема простых чисел.—§ 2. Последняя теорема Фермата. 242

Глава XV. Теория чисел и математическое природоведение. 255

Послесловие 264

Список иллюстраций 266

ИЗДАНИЯ „НАУЧНОГО КНИГОИЗДАТЕЛЬСТВА"

С. Гальперсон. АТЛАС ЛУНЫ.

Под ред. *П. П. Савкевича*, ассистента Астрономич. Обсерватории Петроградского Университета. Атлас содержит 24 таблицы снимков лунной поверхности, исполненных по фотографиям Парижской Обсерватории, снабженных кальками с нумерацией кратеров, названиями горных цепей и морей и богато иллюстрированным объяснительным текстом, *в папке*. Первое издание распродано. Готовится второе, значительно дополненное и расширенное

ИЗ ОТЗЫВОВ: „Небольшая карманного формата книжка содержит весьма интересный подбор фотографий лунной поверхности, расчитанный таким образом, чтобы дать полное представление об особенностях строения нашего вечного спутника. Появление ее нельзя не приветствовать, так как меланхолический вид этого ближайшего нашего соседа, Луны, и те своеобразные очертания, которые на нем видны уже невооруженным глазом, всегда привлекали и привлекают внимание каждого, кто глядит на небо, желая от него получить ответ на вечные запросы человечества. Имея в руках рецензируемую книжку, легко будет разобраться, благодаря приложенным к картам кальк ам и объяснительному тексту, в том сложном на первый взгляд рельефе, который представляет нам поверхность Луны, и выделить наиболее любопытные ее особенности для дальнейшего наблюдения и изучения. Карманный формат книжки особенно будет удобен для применения ее во время наблюдений, выполнение же таблиц при таком уменьшении не оставляет желать лучшего..."

Изв. Русск. Астр. О-ва, XXIII, № 1.

Ч. Бойс, проф. МЫЛЬНЫЕ ПУЗЫРИ.

Лекции о волосности и капиллярных явлениях, читанные перед молодой аудиторией. Пер. с посл. англ. издания *В. М. Поз ера*, под ред. *А. П. Афанасьева*, ассистента Петроградского Университета, с 80-ю рисунками в тексте и цветной таблицей.

ИЗ ОТЗЫВОВ: „С особым удовольствием следует отметить выход в свет этой прекрасной, талантливой книжки. Трудно поверить, что под столь скромным названием — „Мыльные пузыри" — скрывается огромное богатство содержания, почти целая энциклопедия физических знаний и эффектных, поучительных опытов. Мно-

сообразие научных сведений, извлекаемых знаменитым автором этих увлекательных лекций из опытов с мыльными пузырями и родственными явлениями, прямо поразительна. Автор сумел включить в круг своей, на первый взгляд столь узкой, темы и трудные вопросы теории—как, напр., определение величины молекулярных сил или исследование интерференции световых волн—и, рядом с ними,—такие практические вопросы обиходной жизни, как выведение жирных пятен на платье, борьба с комарами.... Все это органически вытекает из той широкой трактовки, какую удалось даровитому автору придать предмету своих лекций..." *„В Маст. Прир"*.

Ф. Ауэрбах, проф. Иенского Университета. СЕМЬ АНОМАЛИЙ ВОДЫ.

Пер. с нем. под редакцией *А. П. Афанасьева*, профессора Второго Петроградского Университета. С 12 рис.

ИЗ ОТЗЫВОВ: „...Посвященная столь, казалось бы, специальной и узкой теме, как рассмотрение физических особенностей воды, книжка проф. Ауэрбаха, благодаря блестящему популяризаторскому таланту автора, нисколько не затрудняет среднего читателя, знакомого хотя бы с начатками природоведения. Все тонкие вопросы теории настолько обстоятельно разъясняются и так хорошо иллюстрируются удачно подобранными сопоставлениями, что читатель незаметно для себя вовлекается в область тех „трудных" отделов физики, где плуг исследователя глубоко взрывает неподатливую почву природы. Как и другая книжка того же ученого — „Царица мира и ее тень", эта интересная монография без сомнения надолго займет видное место в популярно научной литературе.

Перевод, выполненный под компетентной редакцией специалиста, хорошо передает достоинства лекторской манеры автора, своеобразно сочетающей точность и отчетливость языка с изяществом и образностью стиля". *Я. Лесной*.

Ф. Ауэрбах, проф. ЦАРИЦА МИРА И ЕЕ ТЕНЬ.

Общедоступное изложение оснований учения об энергии и энтропии. Пер. с немецк. под ред. проф. *А. П. Афанасьева*. С 10 портретами.

ИЗ ОТЗЫВОВ: „В популярной литературе, русск. и иностранной можно насчитать не мало успешных попыток изложить и разъяснить вполне общедоступно величайший закон природы — закон сохранения энергии. И потому в широкой публике этот всеобъемлющий закон, управляющий вселенной, сравнительно общеизвестен. Но лишь специалистам-физикам известно, что рядом с этим законом существует еще и другой, без знания которого нельзя составить себе правильной картины совершающихся в природе явлений. Это необходимое дополнение закона постоянства энергии с трудом поддается общепонятному изложению, и надо быть таким мастером популяризации, как проф. Ф. Ауэрбах, чтобы удачно выполнить подобную задачу. В своей брошюре „Царица мира и ее тень"*), германский физик подарил нам едва ли не единственную популярную книжку, посвященную этому трудному, но глубоко интересному предмету, так тесно связанному с мировоззрением современного человека. „Царица мира"—по образному уподоблению автора - это энергия, а ее тень—так наз. „энтропия", т.-е. степень рассеяния энергии, делающего ее малоценной, мало способной к новым превращениям..."

„В Маст. Пр." № 4, 1919.

*) Новый перевод в издании „Научного Книгоиздательства" Петроград, 1919 г.

„ВВЕДЕНИЕ В НАУКУ",

серия книг, издаваемых „Научным К-вом" совместно с К-вом „Наука и Школа", редактируемая и предпринимаемая при участии компетентных специалистов, имеет целью в ряде выпусков объемом от 3-х до 5-ти листов, каждый из которых представляет собою самостоятельное целое, дать сжато изложенные, но полные руководящие указания для желающих серьезно ознакомиться с тем или иным отделом данной группы наук.

В каждом выпуске дается объективный обзор основных проблем, вопросов и направлений, ориентирующие библиографические указания и краткий критический обзор главной литературы, преимущественно русской и переведенной на русский язык.

Часть физико-математическая выходит под общей редакцией профессоров: *А. П. Афанасьева, А. В. Васильева, В. В. Серафимова, Л. А. Чугаева* и *Ю. М. Шокальского* и содержит отделы:

Физика (25 выпусков), Астрономия (16 выпусков), Математика (11 выпусков), Химия, География.

ОЧЕРКИ ИЗ ИСТОРИИ РУССКОЙ НАУКИ.

Биографии русских ученых и деятелей науки, очерки по истории развития отдельных отраслей знания в России, история русских научных учреждений и т. п.

НОВОЕ И СТАРОЕ В НАУКЕ.

Непериодические сборники по отдельным отраслям наук:

Новое и старое в астрономии
Новое и старое в химии.
Новое и старое в физике.
Новое и старое в математике.
Новое и старое в биологии.
Новое и старое в географии.

ПЕЧАТАЮТСЯ И ГОТОВЯТСЯ К ПЕЧАТИ:

А. Царт. КИРПИЧИ МИРОЗДАНИЯ — атомы и молекулы. С 45 рис.

А. Бавинк: ВВЕДЕНИЕ ВО ВСЕОБЩУЮ ХИМИЮ. С рисунками.

Р. Фатер. ЭЛЕМЕНТЫ МАШИН, с 180 рис.

А. Келер. АТМОСФЕРНОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСТВО, перевод А. Бианки, под ред. П. Н. Тверского, физика Константиновской Обсерватории. Со мног. рис.

Ю. Шокальский, проф. и **В. Ахматов,** проф. ГЕОГРАФИЧЕСК. КАРТА, ее сущность, составление и пользование ею. С рисунками.

К. Клей. ОПЫТЫ ПО СВЕТУ НА ПРОСТЫХ ПРИБОРАХ. Со 155 рис.

В. Литцман и Ф. Трир. ГДЕ ОШИБКА? Собрание математических парадоксов. С 24-ью чертежами

О. Хвольсон, проф. СПЕКТР РЕНТГЕНОВЫХ ЛУЧЕЙ И ТЕОРИЯ БОРА. С 7-ью чертежами.

А. Фосс. СУЩНОСТЬ МАТЕМАТИКИ. Пер. с переработанного нем. издания И. Яшунского под ред. проф. А. В. Васильева.

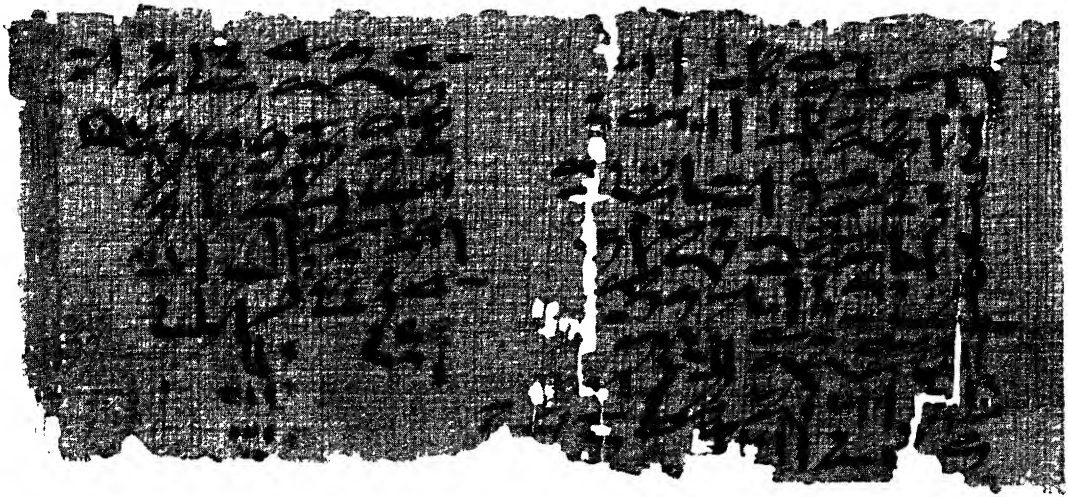
А. В. Васильев, проф. ЦЕЛОЕ ЧИСЛО. Историч. очерк с 24 рис. в тексте и отдельной таблицей.

Его-же. А. И. ЛОБАЧЕВСКИЙ. Очерк жизни и творчества. С рисунками.

ПРОДАЖА ВО ВСЕХ КНИЖНЫХ МАГАЗИНАХ.

Склад изданий:

„НАУКА и ШКОЛА", Литейный, 36



Факсимиле 16-го и 17-го столбцов математического папируса Голенищева
(Московский Музей Изящных Искусств)

XIX—XVIII век до Р. Х.